

чем дальше, тем больше понадобится знаков целой части, так что лучше уж писать простые приближенные формулы, чем нагромождать квадратные скобки.) Когда вычеркнем каждое четвертое из оставшихся чисел, останется примерно  $\frac{3}{4}N/3 = N/4$ . И вообще, после вычеркивания каждого  $k$ -го числа останется примерно  $n = N/k$  чисел.

Казалось бы, все уже сделано: мы помним, что вычисления заканчиваются в момент, когда  $k > n$ , т.е.  $k^2 > N$ . Значит,  $k$ -й член последовательности должен быть *примерно* равен  $k^2$ . Только вот правильного ответа  $\pi k^2/4$  такое простое рассуждение никак не дает!

Почему не дает? Из-за многократно повторенных слов «примерно» и «приблизительно». Заменяя целую часть числа самим этим числом, мы делаем не очень большую – не больше 1 – ошибку. Но за  $k$  шагов ошибки накапливаются и оказываются по величине сравнимы с самой исследуемой величиной.

Обратите внимание: в начале вычислений  $k$  невелико, а  $N/k$  огромно, так что относительная ошибка невелика, а с ростом  $k$  и соответственным уменьшением величины  $N/k$  относительная ошибка возрастает!

**Что происходит в конце вычислений?**

В самый последний момент число  $k$  оказывается равно количеству  $n$  уцелевших к этому моменту чисел. Перед этим довольно продолжительное время  $k$  приблизительно равно  $n$  и потому на каждом таком  $k$ -м шаге вычеркиваем по одному числу. Перед этим несколько более короткое, но тоже продолжительное время вычеркиваем по два числа, перед этим – по три числа, и так далее.

Давайте придадим этому более точную форму. Пусть самый последний шаг – вычеркивание  $j$ -го числа из  $j$  уцелевших к этому моменту. Тогда перед ним вычеркнули  $(j - 1)$ -е число из  $j + 1$ , при этом было  $k = j - 1$  и  $n = j + 1$ . Чуть раньше  $k = j - 2$  и  $n = j + 2$ , еще раньше  $k = j - 3$  и  $n = j + 3$ . Вообще, если идти с конца к началу, то до тех пор, пока вычеркивали по одному числу, выполнялись равенства  $k = j - a$  и  $n = j + a$ . Переход на другой режим происходит в момент, когда  $2(j - a) \approx j + a$ , т.е. когда  $a \approx j/3$ . При этом  $k \approx \frac{2}{3}j$  и  $n \approx 2k$ . (Разумеется, можно было бы получить не приближенные, а точные формулы. Но дальнейшие рассуждения все равно потребуют приближенных формул, так что мы обойдемся без лишних квадратных скобок.)

Теперь ясно, что формулы  $k \approx \frac{2}{3}j - b$  и  $n \approx \frac{4}{3}j + 2b$  описывают процесс на той стадии, когда вычеркиваем по два числа. Переход на режим вычеркивания по три числа

соответствует равенству  $3\left(\frac{2}{3}j - b\right) \approx \frac{4}{3}j + 2b$ , из которого

находим  $b \approx \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}j$ , откуда  $k \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}j$  и  $n \approx 3k$ .

Продолжая рассуждать в том же духе и обозначая для краткости  $c_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1}$ , находим, что переход между режимами вычеркивания по  $m$  и по  $m + 1$  чисел происходит при  $k \approx c_m j$  и  $n \approx (m + 1)k$ .

Сознательно сделав несколько вычислительных ошибок, Акулич смог из этих формул получить число  $\pi/4$ . Будучи честным человеком, он сам обратил внимание читателей на эти передегеривания и признал, что «рассуждения имеют

немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы!». В общем, он поступил как инженер, которому некогда разбираться с тонкостями математических формул и который поэтому не постесняется умножить или разделить полученный ответ на 2 или на что-нибудь другое, если после этого ответ будет лучше соответствовать экспериментальным данным.

А дело в том, что формулы  $k \approx c_m j$  и  $n \approx (m + 1)k$  довольно точны при маленьких  $m$  и теряют точность при возрастании  $m$ . Эффект такой же, какой мы уже наблюдали, когда рассматривали процесс от начала к концу: ошибка накапливается и оказывается при больших  $m$  сопоставимой с самой исследуемой величиной.

**Стыковка**

Что же делать, если и при рассмотрении от начала к концу, и при рассмотрении от конца к началу успевает накопиться ошибка? Любой строитель подземного тоннеля знает ответ: надо пустить их навстречу друг другу! В момент стыковки  $k \approx c_m j$  и  $N/k \approx (m + 1)c_m j$ , откуда  $N \approx (m + 1)c_m^2 j^2$ . В силу формулы Валлиса,  $(m + 1)c_m^2 \rightarrow \pi/4$ , так что мы получили в точности то, что требовалось. И заметьте: никакого обмана и обсчета читателей!

**Доказательство формулы Валлиса**

Использовать формулу Стирлинга  $m! \approx (m/e)^m \sqrt{2\pi m}$  для доказательства формулы Валлиса я не буду, поскольку самое известное и простое доказательство формулы Стирлинга состоит именно в том, что сначала доказывают соотношение  $m! \approx k\sqrt{m}(m/e)^m$  с некоторым неизвестным коэффициентом  $k$ , а затем из формулы Валлиса находят  $k = \sqrt{2\pi}$ .

Я сделаю проще: как рекомендуют с давних пор по этому поводу учебники математического анализа, рассмотрим

$$a_m = \int_0^\pi \sin^m x dx.$$

Тогда  $a_0 = \pi$  и  $a_1 = 2$ . Далее – интегрирование по частям в стиле вытягивающего себя за волосы из болота Мюнхгаузена:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \int_0^\pi \sin^{m+1} x dx = -\int_0^\pi \sin^m x d \cos x = -\sin^m x \cos x \Big|_0^\pi + \\ &+ m \int_0^\pi \cos^2 x \sin^{m-1} x dx = m \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^{m-1} x dx = \\ &= ma_{m-1} - ma_{m+1}, \end{aligned}$$

откуда

$$a_{m+1} = \frac{m}{m+1} a_{m-1}.$$

Теперь легко находим  $a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 2 \cdot \frac{2}{3}$ ,  $a_4 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \pi$ , и вообще

$$a_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2m-1}{2m} \pi, \quad a_{2m+1} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Какое отношение все эти интегралы имеют к формуле Валлиса? Самое прямое: из неравенств

$$a_{2m-1} > a_{2m} > a_{2m+1}$$