

т.е. уменьшится в N^3 раз. Излучаемая при ускоренном движении заряда мощность пропорциональна величине этого заряда и квадрату его ускорения (если это вам не известно, то можно воспользоваться методом размерностей и проверить сказанное). Итак, излучаемая в модели мощность будет равна

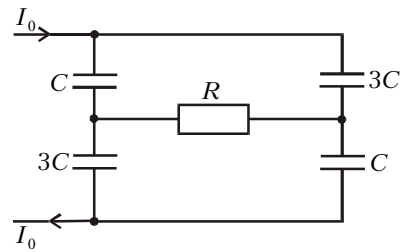
$$P^* = P \frac{N}{N^6} = \frac{P}{N^5}$$

и энергия «электрона» будет израсходована за время

$$\tau^* = \tau \frac{N^5}{N} = \tau N^4.$$

А.Зильберман

Ф1695. В схеме на рисунке конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0 . Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T ?



Вначале решим задачу приближенно.

Если с момента включения прошло немного времени, конденсаторы зарядились до небольших напряжений и ток через резистор мал. Тогда этим током можно просто пренебречь, а цепочки конденсаторов считать разделенными. При этом в каждую цепочку течет половинный ток, т.е. $0,5I_0$, и напряжение каждой цепочки, а значит и напряжение источника, растет со временем по закону

$$U(t) = \frac{0,5I_0 t}{C_{\text{общ}}} = \frac{2I_0 t}{3C}.$$

Это соотношение остается справедливым при малом токе через резистор, а ток определяется напряжением в диагонали «мостика» из конденсаторов – при малом токе напряжение составляет половину приложенного к схеме напряжения $U(t)$ (напряжение конденсатора емкостью C составляет три четверти этого напряжения, а конденсатора емкостью $3C$ – одну четверть). Тогда условие для малости тока резистора запишется в виде

$$\frac{0,5U(t)}{R} = \frac{I_0 t}{3RC} \ll I_0,$$

а для времени –

$$t \ll 3RC,$$

где R – сопротивление резистора.

Через достаточно большое время после включения цепи (т.е. при $t \gg RC$) ток через резистор практически перестанет увеличиваться (его величина монотонно возрастает, но ограничена сверху). Это означает, что напряжения конденсаторов емкостями C и $3C$ за одинаковые интервалы увеличиваются одинаково и отношение токов равно отношению емкостей. Следовательно, ток зарядки конденсатора емкостью C (точнее, двух таких конденсаторов – ясно, что в данной симметричной схеме одинаковые конденсаторы заряжаются одинаково) равен $0,25I_0$, а ток конденсатора емкостью $3C$ составляет $0,75I_0$. За время Δt напряжение схемы увеличится на $2 \cdot 0,25I_0 \Delta t / C$. Если

начальным напряжением схемы пренебречь – вначале напряжение нарастало примерно с такой же скоростью, но в течение короткого времени, – то можно считать

$$U(t) = \frac{0,5I_0 t}{C}.$$

Ток через резистор при этом составит $0,5I_0$, и за большой интервал времени T на резисторе выделится в виде тепла энергия

$$W = 0,25I_0^2 RT.$$

Получим теперь точное решение задачи. Введем обозначения: q – заряд конденсатора емкостью C , J – ток зарядки этого конденсатора, Q – заряд конденсатора емкостью $3C$, $(I_0 - J)$ – его ток зарядки. Ток I резистора определяется разностью напряжений «нижних» конденсаторов:

$$\frac{q}{C} - \frac{Q}{3C} = IR = (I_0 - 2J)R.$$

Приравняем производные левой и правой частей этого уравнения и учтем при этом, что $q' = J$, $Q' = I_0 - J$:

$$\frac{J}{C} - \frac{I_0 - J}{3C} = -2J'R.$$

После простых преобразований получим

$$-1,5RCJ' = J - 0,25I_0.$$

Избавимся от постоянной добавки в правой части уравнения – вместо переменной величины J возьмем $J_1 = J - 0,25I_0$ (производная при этом не изменится, но уравнение станет проще, а потом мы эту поправку «учтем назад»):

$$J_1' = \frac{J_1}{-1,5RC}.$$

Если вы умеете решать такие уравнения, то очень хорошо, а если нет – будем решать его вместе.

Итак, что это за функция времени, которая при взятии от нее производной остается самой собой, но появляется множитель $1/(-1,5RC)$? Таким свойством, как известно, обладает экспонента:

$$J_1(t) = A \exp\left(\frac{t}{-1,5RC}\right).$$

Величину множителя A найдем, пользуясь начальным значением найденной функции. В «приближенном» решении мы установили, что сразу после включения цепи ток зарядки конденсатора меньшей емкости $J(0)$ равен половине тока I_0 , тогда

$$A = 0,5I_0 - 0,25I_0 = 0,25I_0.$$

Теперь запишем полученное выражение для тока зарядки конденсатора:

$$J(t) = 0,25I_0 \left(1 + \exp\left(\frac{t}{-1,5RC}\right) \right).$$

Дальше мы найдем заряд конденсатора емкостью C как функцию времени – для этого достаточно проинтегрировать по времени полученное выражение для тока:

$$q(t) = \frac{0,25I_0 t}{C} + 0,25I_0 \left(1,5RC - 1,5RC \exp\left(\frac{t}{-1,5RC}\right) \right).$$