

$$27C^2 + 1 = 0.$$

Заметим сразу, что $p > 3$.

Положим

$$n = -\frac{3C}{2} - \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Тогда

$$n(n+1) = \frac{9C^2}{4} - \frac{1}{4},$$

$$3n^2 + 3n + 1 = \frac{27C^2}{4} + \frac{1}{4} = 0. \quad (2)$$

Далее,

$$3n^3 + 3n^2 + n = 0.$$

Из (2) и (1) следует, что

$$3n^2 + n = -2n - 1 = (3C + 1) - 1 = 3C.$$

Получили:

$$3n^3 + 3C = 0,$$

или

$$n^3 + C = 0. \quad (3)$$

Последнее равенство означает, что x_n делится на p ; сложив (3) с (2), получим, что на p делится и x_{n+1} – следующий член последовательности задачи.

В.Сендеров

Ф1688. Автомобиль на прямой передаче (на четвертой скорости коробки передач) может на прямом шоссе развивать скорость от 50 км/ч до 140 км/ч. При скорости 70 км/ч расход бензина составляет 7 л на 100 км пробега; КПД двигателя не зависит от скорости. Сопротивление движению пропорционально квадрату скорости автомобиля. Емкость бензобака автомобиля 40 л, других емкостей для топлива в автомобиле нет. Два водителя (чтобы можно было ехать без перерывов) должны перегнать автомобиль на расстояние 2000 км; заправочные станции по пути расположены на расстояниях 200 км или 300 км друг от друга; перегоны разной длины строго чередуются. За какое минимальное время водители смогут проделать весь путь? Какое минимальное количество бензина можно потратить, если ехать помедленнее? Езда на пониженной передаче приводит к увеличению расхода бензина.

Каждый из перегонов нужно проехать с максимальной возможной скоростью, насколько позволит запас бензина. Для перегона длиной 200 км можно потратить 20 л на 100 км. Расход бензина пропорционален силе сопротивления движению; следовательно, на этом участке скорость будет равна $v_1 = \sqrt{20/7} \cdot 70$ км/ч ≈ 118 км/ч и время прохождения составит $T_1 = 200/118$ ч $\approx 1,7$ ч. Для участка длиной 300 км расход топлива на 100 км составит $40/3$ л $\approx 13,3$ л; значит, $v_2 = \sqrt{13,3/7} \cdot 70$ км/ч ≈ 97 км/ч и $T_2 \approx 3,1$ ч. Полное время путешествия (четыре участка по 200 км и четыре по 300 км) составит

$$T_{\text{общ}} = 4(T_1 + T_2) \approx 19,2 \text{ ч.}$$

Более точный расчет не имеет смысла делать – слишком много явных упрощений в условии задачи.

Для второго случая все ясно – ехать нужно на наименьшей возможной скорости, т.е. на 50 км/ч. Расход бензина при этом составит $7 \text{ л} \cdot 50^2/70^2 \approx 3,5$ л на 100 км, и всего понадобится

$$3,5 \text{ л} \cdot \frac{2000}{100} = 70 \text{ л.}$$

С.Варламов

Ф1689. По гладкому горизонтальному столу свободно скользит прямая однородная палочка длиной L . В данный момент скорость одного из концов палочки равна v и составляет угол α с палочкой, а скорость другого конца по величине равна $2v$. Найдите скорость центра палочки и ускорения ее концов.

Из условия задачи ясно, что силы трения на палочку не действуют. Значит, центр масс (для однородной палочки – ее середина) движется с постоянной по величине и направлению скоростью и угловая скорость вращения палочки также неизменна.

Проекции скоростей концов палочки на ее направление должны быть равны друг другу в любой момент, поэтому (рис.1)

$$v \cos \alpha = 2v \cos \beta, \text{ и } \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha.$$

На рисунке 2 скорости концов палочки разложены на удобные направления – вдоль палочки и перпендикулярно ей. Скорость центра тоже выразим через ее проекции. Вдоль палочки это $v \cos \alpha$, а перпендикулярно ей –

$$\frac{v \sin \alpha + 2v \sin \beta}{2} = v \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} v \left(\sin \alpha + \sqrt{4 - \cos^2 \alpha} \right).$$

Теперь легко найти угловую скорость вращения палочки. Поскольку скорость «верхнего» конца относительно центра равна $\frac{1}{2} v \left(\sqrt{4 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right)$, угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} v \left(\sqrt{4 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right)}{\frac{1}{2} L} = \frac{v \left(\sqrt{4 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right)}{L}.$$

Ускорения концов одинаковы и составляют

$$\omega^2 \frac{L}{2} = \frac{v^2 \left(\sqrt{4 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right)^2}{2L}.$$

А.Палочкин

Ф1690. Небольшое тело бросают параллельно поверхности Земли с высоты 1 км. Определите, где находится точка падения тела на Землю, если его скорость на 1%