

строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.

Нашу таблицу из  $3n$  чисел будем называть матрицей  $M$ . Нужно доказать, что оговоренные в условии суммы  $S_1$  и  $S_2$  равны.

Каждая из этих сумм состоит из  $n$  слагаемых вида  $xyz$ , где  $x + y + z = h$ ; при этом  $h$  постоянно для всех слагаемых. Можно записать  $xyz = (h - y - z)(h - x - z)(h - x - y)$ . Совершив элементарные преобразования с этим равенством, мы получим новое равенство, которое позволит нам решить задачу:

$$6xyz = h^3 - 3h(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^3 + y^3 + z^3). \quad (*)$$

Обозначим через  $A$  сумму квадратов всех чисел матрицы  $M$ , а через  $B$  – сумму кубов этих чисел. В силу  $(*)$  можно записать

$$6S_1 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

а также

$$6S_2 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

т.е. окончательно – требуемое равенство:

$$S_1 = S_2.$$

*В.Произволов*

**M1679.** Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа  $a_0 > 0$  и  $b_0 < 0$ . Числа  $a_{n+1}$  и  $b_{n+1}$  принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному корням уравнения  $x^2 + a_n x + b_n = 0$ . Найдите пределы обеих последовательностей.

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем

$$a_n = -(a_{n+1} + b_{n+1}) = a_{n+2} + b_{n+2}(1 - a_{n+2}).$$

Так как  $b_{n+2} < 0$ , отсюда следует, что либо  $1 < a_{n+2} < a_n$ , либо  $1 > a_{n+2} > a_n$ , и, значит, последовательности, составленные из четных и нечетных членов  $a_n$ , монотонны и ограничены. Обозначим их пределы, соответственно,  $A_0$ ,  $A_1$ . Теперь, поскольку  $b_n = -(a_n + a_{n+1})$ , последовательность  $b_n$  имеет предел, равный  $B = -(A_0 + A_1)$ . Переходя к пределу в равенстве  $b_n = a_{n+1}b_{n+1}$ , получаем  $B = B \cdot A_0 = B \cdot A_1$ .

Если  $B = 0$ , то  $(A_0 + A_1) = 0$ , что невозможно, так как  $A_0$ ,  $A_1$  положительны. Следовательно,  $A_0 = A_1 = 1$ ,  $B = -2$ .

*А.Заславский, А.Поспелов*

**M1680.** Числовая последовательность задается равенством  $x_n = n^3 + C$ , где  $n$  принадлежит натуральному ряду.

а) Пусть  $C$  – натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).

б) Пусть  $C$  является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в)\* Существует ли такое натуральное число  $C$ , что любые соседние члены последовательности взаимно

просты?

а) Предположим противное, и пусть  $p$  – простой общий делитель некоторых трех чисел  $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ . Число  $p$  делит и числа  $x_{n+1} - x_n$  и  $x_{n+2} - x_{n+1}$ , а значит, и число

$$(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = (3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1) - (3n^2 + 3n + 1) = 6(n+1).$$

Но из трех чисел  $x_n, x_{n+1}$  и  $x_{n+2}$  ровно одно делится на 3 и хотя бы одно нечетно; значит,  $p$  делит  $n+1$ . С другой стороны,  $p$  делит  $x_{n+1} = (n+1)^3 + C$ , откуда  $p$  делит  $C$ . Далее, поскольку число  $p$  делит  $x_n = n^3 + C$ , то оно делит и  $n$ . Но  $\text{НОД}(n+1, n) = 1$ . Противоречие.

б) Решение этого пункта содержится в решении пункта в).

в) Нет, не существует. Докажем это.

Любой общий простой делитель чисел  $n^3 + C$  и  $(n+1)^3 + C$  делит также и число  $27C^2 + 1$ . Это доказывается непосредственно, с помощью алгоритма Евклида.

Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, при нечетном  $C$  число  $27C^2 + 1$  четно. В то же время разность  $x_{n+1} - x_n = 3n(n+1) + 1$  – число всегда нечетное.

Разберемся теперь, как обстоит дело с нечетными делителями; докажем вначале, что у любого числа  $27C^2 + 1$ , где  $C$  – натуральное, нечетный простой делитель есть.

**Лемма.** Уравнение  $27C^2 + 1 = 2^k$  не имеет решений в натуральных числах.

**Доказательство леммы.** Очевидно, число  $C$  не может быть четным. При нечетном  $C$  воспользуемся следующим очевидным преобразованием:

$$27C^2 + 1 = 28C^2 - (C-1)(C+1).$$

Число  $(C-1)(C+1)$  делится на 8, а число  $28C^2$  – не делится. Следовательно,  $2^k \leq 4$ ; но  $27C^2 + 1 \geq 28$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем теперь, что любой нечетный простой делитель  $p$  числа  $27C^2 + 1$  годится: существует такое  $n(p)$ , что и  $x_n$ , и  $x_{n+1}$  делятся на  $p$ . Чтобы показать это, нам будет удобнее оперировать не с самими числами, а с остатками, которые они дают при делении на  $p$ . При таком подходе числа, дающие один и тот же остаток при делении на фиксированное натуральное число  $m$  ( $m \geq 2$ ), обычно отождествляют: их объединяют в единый «класс вычетов по модулю  $m$ ». Обозначают это так:  $a \equiv b \pmod{m}$ . Очевидно, множество  $Z_m$  классов вычетов по модулю  $m$  содержит  $m$  элементов; в качестве представителей этих классов часто бывает удобно рассматривать остатки  $0, 1, \dots, m-1$ .

При любом  $m > 1$  во множестве  $Z_m$  естественным образом вводятся операции сложения, умножения и вычитания. А в  $Z_p$  ( $p$  – простое) можно также и делить. Именно, любое сравнение  $x \cdot a \equiv b \pmod{p}$ , где  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , имеет, и притом единственное, решение  $x$ ; его и обозначают как  $\frac{b}{a} \pmod{p}$ .

При любом  $m > 1$  во множестве  $Z_m$  естественным образом вводятся операции сложения, умножения и вычитания. А в  $Z_p$  ( $p$  – простое) можно также и делить. Именно, любое сравнение  $x \cdot a \equiv b \pmod{p}$ , где  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , имеет, и притом единственное, решение  $x$ ; его и обозначают как  $\frac{b}{a} \pmod{p}$ .

а

Подробнее обо всем этом можно прочесть в статье А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год).

Как мы уже говорили, все вычисления мы будем проводить в  $Z_p$ , где  $p$  – нечетный простой делитель числа  $27C^2 + 1$ . Для сокращения записи мы будем сравнения заменять равенствами: вместо  $a \equiv b \pmod{p}$  мы будем писать просто  $a = b$ . В частности, при такой записи будет