Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1696» или «Ф1703». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1696, М1697, М1699, М1701, М1702 и М1704 предлагались на XXV Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1703—Ф1712 предлагались на финальном туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1696—М1705, Ф1703—Ф1712

М1696. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

Д.Карпов

М1697. Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$?

А.Голованов

М1698. На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (рис.1). При этом известно, что

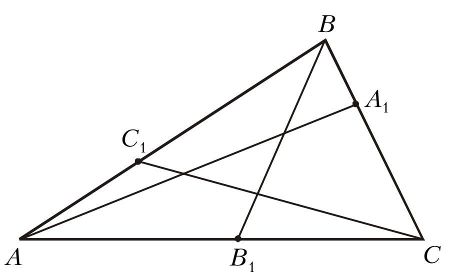

Рис.1

$AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.

В.Сендеров

М1699. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\left\{\sqrt{1}\right\} + \left\{\sqrt{2}\right\} + \ldots + \left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Здесь $\{k\}$ – дробная часть числа k.)

А.Храбров

М1700*. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, ..., $2n$. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через $2n$ прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна $n(2n-1)$. Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.

В.Произволов

М1701. Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \le 2$.

С.Злобин

М1702*. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.

В.Дольников

М1703. Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m + b^m + c^m = 0$ и $a^n + b^n + c^n = 0$. Докажите, что $abc = 0$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание лю-