ная совсем простенькая на вид задача сама по себе не так уж проста. Но после того как найдено число решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$, тут и в самом деле почти нечего делать – разве что обозначить через $x_i$ количество покупаемых пирожных $i$-го сорта ($i = 1, \ldots, n$). Искомое число равно (7).

Конечно, речь могла идти не о пирожных, а о чем-либо другом. Важно лишь, что ищется число неупорядоченных наборов из $m$ элементов, причем каждый элемент принадлежит какому-либо из $n$ типов. Так как элементы одного типа считаются неразличимыми, то допускаются, таким образом, «повторения» элементов в наборе.

## «Повторения с повторениями»

Размещения, перестановки, сочетания – и сразу, как грибы после дождя, размещения с повторениями, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями… С непривычки можно растеряться, тем более, что повторения не всегда понимаются одинаково. Стоит, пожалуй, вернуться к этим терминам и еще немного о них поговорить. Так сказать, повторение на тему повторений.

Вот, к примеру, такой вопрос. Перестановки – частный случай размещений, и формула для числа перестановок – частный случай формулы для числа размещений. С другой стороны, перестановки с повторениями – вроде бы частный случай размещений с повторениями, но формула для числа перестановок с повторениями отнюдь не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями. В чем тут дело?

Когда речь идет о повторениях элементов в наборе (упорядоченном или нет), возможны две противоположные ситуации:

а) нет никаких ограничений на число повторений элементов (кроме того, что общее число элементов набора равно заданному числу);

б) каждый элемент должен повторяться в наборе заданное число раз.

Встречаются и варианты, промежуточные между этими двумя, но сейчас они нам не нужны.

Размещения с повторениями и сочетания с повторениями объединяет то, что имеется в виду а), тогда как число перестановок с повторениями определяется в ситуации б). Конечно, размещения и перестановки (с повторениями или без) близки в другом отношении – как упорядоченные наборы, тогда как сочетания (с повторениями или без) – наборы неупорядоченные. Кстати, для неупорядоченных наборов постановка б) бессодержательна (ответ, очевидно, равен 1).

Насколько полезна и удобна вся эта «повторительная» терминология?

Для очень простого (по виду и смыслу) выражения $n^m$ название «число размещений с повторениями из $n$ по $m$» является, пожалуй, излишне длинным и торжественным. Но в ясности ему не откажешь.

Перестановки с повторениями – термин ясный и удачный.

В случае сочетаний с повторениями с ясностью не все благополучно. Вернемся к задачам из предыдущего пункта. При покупке пирожных проблем не возникает (кроме финансовой); ясно, что здесь повторяются пирожные одного сорта. Задача дележа рассматривалась в двух постановках – I (пираты с признаками морали) и II (аморальные пираты). В случае I возникали сочетания, в случае II – сочетания с повторениями. А что, собственно, повторяется в варианте II?

Монеты? Они, естественно, «повторяются», поскольку идентичны. Но они ведь были идентичными и в варианте I.

Пираты? Но каждый из них у нас в единственном экземпляре. Правда, можно кодировать дележ, сопоставляя каждой монете имя владельца; тогда пираты (вернее, их имена) будут повторяться. Но, опять-таки, в этом смысле они «повторялись» и в I постановке – однако там были сочетания без повторений.

Если исходить из метода решения, следует признать, что повторяются промежутки между монетами – как места для перегородок. При II постановке, в отличие от I, один промежуток может повториться для нескольких перегородок.

Прямо скажем, промежуток между монетами – вещь куда менее ощутимая, чем монета или пирожное. Два пирата, которым при дележе достались лишь «промежутки между монетами», вряд ли станут выяснять, один и тот же у них промежуток или разные – скорее, они станут выяснять отношения с другими членами шайки.

Для тех, кто еще не устал, можно добавить следующее. Если забыть о способе решения и думать лишь об аналогии с задачей о покупке пирожных, то придется, пожалуй, принять – несмотря на все сказанное ранее, – что «повторяются» все-таки пираты!

В общем, неразбериха что надо.

Мораль проста: начинающим не рекомендуется связываться с термином «сочетания с повторениями» без особой надобности. Можно ведь говорить о числе решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$. Это кристально ясное выражение, не дающее повода для «кривотолков». Задачи о дележе (II постановка) и о покупке пирожных внешне различны. Но стоит написать уравнение (6), как сразу становится очевидным, что это одна и та же задача.

Иногда вместо количества решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$ говорят о количестве разбиений числа $m$ на $n$ неотрицательных слагаемых. Это хуже. При наличии нулевых слагаемых не очень уместно говорить о разбиениях (можно ли считать, что $3 = 3 + 0 + 0 + 0$ означает «разбиение» числа 3 на 4 слагаемых?), но главное в другом. Разбиения $8 = 5 + 3$ и $8 = 3 + 5$ – это два разных разбиения или это по существу одно и то же разбиение? Можно понимать и так и этак, стало быть, нарушается Главное Правило Комбинаторики.

В то же время вряд ли кто-нибудь усомнится в том, что $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ и $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ – это разные решения уравнения $x_1 + x_2 = 8$. На сей счет в математике устойчивые традиции.

Стоит ли уделять столько внимания терминологии – ведь в конечном счете она несущественна? В конечном, пожалуй, и впрямь несущественна. Но для начинающих «начальный счет» куда важнее «конечного».

*(Окончание следует)*