правлен либо вверх, либо вправо. Обозначая эти возможности буквами В и П соответственно, получаем код в виде 12-буквенного слова, содержащего 4 В и 8 П. Например, для выделенного пути он имеет вид

В П П П В В П П В П П П.

Остается воспользоваться числом перестановок с повторениями, либо, поскольку букв всего две, числом сочетаний. Так как для букв В надо выбрать 4 места из 12, то ответ равен $\binom{12}{4} = 495$.

Вместо выбора 4 мест для букв В можно, конечно, выбирать 8 мест для букв П. На ответ это не повлияет, так как

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Данное равенство можно доказывать двумя методами – комбинаторным и аналитическим. Комбинаторный таков: каждому m-подмножеству отвечает дополнительное к нему $(n-m)$-подмножество, поэтому число тех и других совпадает. Аналитический же метод сводится к тому, чтобы посмотреть на выражение (5).

Существует целый ряд других, не столь очевидных, соотношений для чисел $\binom{n}{m}$. Некоторые из них будут упомянуты позднее. Расчет, проведенный выше для прямоугольника 4×8, читателю предлагается самостоятельно провести для прямоугольника общего вида $m_1 \times m_2$. А что будет, если перейти от плоского случая к пространственному?

Диофантово уравнение $x_1 + \ldots + x_n = m$

Давно уже мы не занимались распределением материальных благ – с тех пор, как делили три конфеты между тремя лицами. Теперь, вооружившись формулой для числа сочетаний, вернемся к этому увлекательному занятию. Для разнообразия пусть пираты делят между собой золотые монеты (добытые, естественно, специфическими методами).

Задача 11. *Сколькими способами могут 5 пиратов разделить между собой 10 монет?*

Блеск золота не должен ослеплять нас настолько, чтобы мы забыли о Главном Правиле. Итак, уточняем: пираты все различны (ярко выраженные индивидуальности!); монеты все одинаковы; допускается любой способ дележа, при котором каждый получает хотя бы одну монету. Теперь задачу можно решать.

На первый взгляд неясно, при чем тут число сочетаний. Но мы уже убедились, что первый взгляд часто обманчив. Перейдем сразу ко второму и направим его на 10 монет

○○○|○|○○○|○○|○,

разделенных «перегородками», указывающими конкретный способ дележа. В данном случае, например, расположение перегородок означает, что первый пират получает 3 монеты, второй – 1, третий – 3, четвертый – 2, пятый – 1.

Теперь ситуация проясняется. Ввиду правил дележа перегородки должны находиться в промежутках между монетами (а не слева или справа от монет) и в каждом промежутке должно быть не более одной перегородки. Итак, речь идет о выборе 4 мест из 9. Стало быть, способов дележа столько, сколько 4-подмножеств у 9-множества, т.е. $\binom{9}{4} = 126$.

Заметим, что фактически найдено число решений в натуральных числах «уравнения дележа»

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10.$$

Здесь x_i – число монет, получаемых i-м пиратом ($i = 1, \ldots, 5$).

Переходя к общему случаю n пиратов и $m (\geq n)$ монет,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m, \qquad (6)$$

имеем $\binom{m-1}{n-1}$ различных решений в натуральных числах. (Этот ответ остается в силе для любых натуральных m и n, если принять, что $\binom{k}{l} = 0$ при $k < l$.)

Рассмотрим теперь случай совершенно аморальных пиратов, которые допускают любые способы дележа (вплоть до того, что все монеты достанутся одному). Итак, речь теперь идет о числе решений уравнения (6) в целых неотрицательных числах (для x_i допускается и значение 0). Неравенство $m > n$ при такой постановке излишне, т.е. m, n – произвольные натуральные числа.

Если снова вернуться к геометрической иллюстрации, то теперь возможны любые расположения m кружков и $n-1$ перегородок. Например, для 5 пиратов и 10 монет расположение

|○○○○○|||○○○○○

отвечает случаю, когда первый, третий и четвертый пираты не получают ничего, а второй и пятый – по пять монет каждый. Итак, для перегородок надо выбрать 4 места из 14, а это можно сделать $\binom{14}{4} = 1001$ способом.

Для общего случая находим, что уравнение (6) имеет

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m} \qquad (7)$$

решений в целых неотрицательных числах.

Пожалуй, более простое доказательство состоит в замене переменных $y_i = x_i + 1$, $i = 1, \ldots, n$. Каждому решению уравнения (6) в целых неотрицательных числах взаимно однозначно соответствует решение уравнения

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m + n$$

в натуральных числах. Таких решений, как показано ранее, $\binom{m+n-1}{n-1}$, т.е. опять приходим к (7).

Уравнения в целых числах обычно называют *диофантовыми* по имени много занимавшегося ими древнегреческого математика Диофанта. Итак, мы нашли число решений диофантова уравнения (6) при любом из предположений: а) все $x_i > 0$; б) все $x_i \geq 0$. А что будет с числом решений, если на целые x_i не накладывается никаких дополнительных ограничений?

Величину (7) часто называют числом сочетаний с повторениями из n по m. Такое название связано с классом задач, типичным представителем которых является следующая.

Задача 12. *Имеется n сортов пирожных, требуется купить m пирожных. Сколькими способами это можно сделать?*

Пирожные одного сорта, естественно, считаются неразличимыми. Дан-