те (хотя с его произношением и истолкованием не все ясно).

Обозначение шахматных полей (например, e4) или номеров автомобилей (например, МЯУ 1999) – примеры кортежей, где одни компоненты – буквы, другие – цифры.

Как видим, кортеж — весьма общее понятие. Главным характерным признаком кортежей является их упорядоченность. Кортежи $a_1, \ldots, a_m$ и $a'_1, \ldots, a'_m$ считаются совпадающими (равными) в том и только в том случае, если $m = m'$ и $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2, \ldots, a_m = a'_m$; в противном случае кортежи, естественно, считаются различными. В частности, a,b и b,a – различные кортежи (при $a \neq b$). Итак, равенство кортежей – такое же, как у векторов или слов (никто ведь не считает слова БАР и БРА совпадающими). Иначе обстоит дело с неупорядоченными наборами, о которых речь будет идти позднее.

Принцип умножения

Большое число задач комбинаторики (среди них есть и трудные) связано с подсчетом количества кортежей определенного вида. Однако удивительно часто приходится иметь дело с множествами кортежей, имеющими особо простую структуру, позволяющую определить число кортежей в множестве без труда. Суть дела такова.

Пусть множество S кортежей длины m порождается следующим образом: компонента a_1 пробегает n_1 различных значений, при любой фиксированной a_1 компонента a_2 пробегает n_2 различных значений и т.д., вплоть до a_m, которая при любых фиксированных $a_1, \ldots, a_{m-1}$ пробегает n_m различных значений. Тогда общее число кортежей в множестве S есть

$$n = n_1 n_2 \ldots n_m. \qquad (2)$$

Отметим, что значения a_1 (но не их число) могут зависеть от a_2, то же относится и к другим компонентам.

Например, для множества m-мерных двоичных векторов, о которых шла речь в начале, имеем $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 2$. Отсюда по принципу умножения получаем, что их число равно 2^m.

Другой ранее рассмотренный пример – задача о распределении трех конфет между тремя лицами. Пусть все конфеты различны (как и лица), распределения допускаются любые. Обозначая лиц через A, B, C и нумеруя конфеты, можем каждый способ распределения кодировать кортежем $a_1 a_2 a_3$, где a_k – лицо, получившее k-ю конфету (например, код CAA отвечает варианту, когда первую конфету получил C, а обе остальные A). Так как $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, то всего получаем 3^3 вариантов.

Далее, число всех m-буквенных слов в английском алфавите есть 26^m, а в русском – 33^m. Число всех семизначных телефонных номеров есть 10^7 (что, очевидно, вполне достаточно для Москвы; для небольших городов можно обойтись и четырехзначными номерами, количество которых равно 10^4). Число всех автомобильных номеров, образованных тремя русскими буквами и следующими за ними четырьмя цифрами, равно $33^3 \cdot 10^4$.

Дальнейшие примеры, связанные с принципом умножения, будут приведены позднее.

Принцип умножения достаточно очевиден, хотя и не в такой степени, как принцип сложения. Для тех, кому он не кажется очевидным, приведем доказательство с помощью индукции по m. При $m = 1$ утверждение верно. Пусть оно доказано для кортежей длины $m - 1$, т.е. последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ может быть выбрана $n_1 n_2 \ldots n_{m-1}$ способами. Каждому из них соответствует n_m кортежей длины m, получающихся добавлением того или иного значения a_m. Все полученные кортежи различны (любые два, у которых совпадают первые $m - 1$ компонент, отличаются значением m-й компоненты). Поэтому общее число кортежей в множестве S есть $(n_1 n_2 \ldots n_{m-1}) n_m = n_1 n_2 \ldots n_m$.

Если читатель незнаком с математической индукцией, можно обойтись и без педантичного доказательства. По правде говоря, принцип умножения мало отличается от арифметических задач типа: «сколько всего листов в 10 стопках тетрадей, если в каждой стопке по 20 тетрадей, а в каждой тетради по 12 листов?». Всякий школьник даст ответ $10 \cdot 20 \cdot 12 = 2400$, без упоминаний комбинаторики или индукции. Но ведь листов столько, сколько кортежей a_1, a_2, a_3, где a_1 – значения от 1 до 10 (номер стопки), a_2 – значения от 1 до 20 (номер тетради в стопке), a_3 – значения от 1 до 12 (номер листа в тетради). Таким образом, решая эту простенькую задачу, мы неявно пользуемся принципом умножения.

Складывать или умножать – вот в чем вопрос

В такой гамлетовской ситуации иногда оказываются начинающие. В условиях принципа умножения проводится примерно следующее рассуждение: «Для первой компоненты имеется n_1 вариантов, да для второй компоненты n_2 вариантов, ..., да для последней n_m вариантов. Итого получаем n_1, да n_2, ..., да n_m, т.е. $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ вариантов». Обращаем внимание на коварное слово «да» (с этим словом и вообще, как известно, надо обращаться осторожно).

Ошибка в том, что n_1 вариантов для a_1 – это отнюдь не те варианты, общее число которых надо найти. Нужные нам варианты даются ведь кортежами длины m (а не 1, 2...). Варьируя a_1, затем a_2 и т.д., мы получаем (пока не дойдем до a_m) как бы «заготовки», каждая из которых в дальнейшем, после разветвлений, породит много кортежей длины m (т.е. нужных нам вариантов). В «предметных» задачах такая ошибка практически исключена, никто ведь не станет подсчитывать число листов так: «10 стоп, да в каждой по 20 тетрадей, да в каждой по 12 листов – итого 10 + 20 + + 12 листов». Но с абстрактными вариантами такое, увы, бывает.

Число подмножеств

Задача 3. *Сколько различных подмножеств имеется у n-элементного множества?*

Может показаться, что принцип умножения не имеет отношения к этой задаче. Подмножества ведь неупорядоченные наборы (например, $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ – одно и то же), к тому же они могут содержать разное число элементов, а в принципе умножения речь идет о кортежах одинаковой длины. Все дело, оказывается, в том, чтобы удачно закодировать подмножества. Именно, нумеруем элементы исходного множества $M = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ и ставим в соответствие каждому его подмножеству M' двоичный n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i = 1$, если $S_i \in M'$, и $x_i = 0$ в противоположном случае. (Например, если $M = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, то подмножеству $\{S_2, S_5\}$ отвечает вектор (0,1,0,0,1); пустому подмножеству будет отвечать нулевой вектор.) Так как соответствие между подмножествами и