Нельзя ли просто пересчитать?

Этот вопрос напрашивается. Если интересующих нас объектов конечное число, почему бы не составить полный их перечень и попросту пересчитать безо всяких там «комбинаторных рассуждений»?

Рассмотрим пример.

Задача 1. *Сколько существует различных двоичных (т.е. состоящих только из нулей и единиц) последовательностей длины $m = 2$?*

Перечень составляется без всякого труда:

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1).$$

Задача, как видим, оказалась проста, как дважды два – четыре (в данном случае буквально).

Но если тем же методом решать задачу при $m = 10$, уйдет куда больше времени (в перечень войдет свыше тысячи последовательностей). При $m = 20$ осилить такой перечень сможет лишь компьютер. Ну а при $m = 1000$ окажутся бессильными все компьютеры мира, вместе взятые. Правда, в принципе такой перебор все же возможен (если отвлечься от таких «мелочей», как миллиарды лет машинного времени). А как быть, если надо найти число двоичных последовательностей произвольной длины m?

Здесь перебор невозможен в принципе. А между тем очень простые соображения общего характера позволяют мгновенно дать ответ: искомое число есть 2^m. Это сразу вытекает из принципа умножения (см. ниже). Читатель, знакомый с двоичной системой счисления, может здесь обойтись и без этого принципа: все наши последовательности – это записи в двоичной системе чисел $0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1$ (записи, содержащие менее m разрядов, дополняются нулями впереди).

Данный пример ясно показывает мощь общих комбинаторных соображений по сравнению с примитивным перебором. Не следует, конечно, думать, что все комбинаторные задачи можно решить так же мгновенно. Рассмотренная задача относилась к числу простейших. В комбинаторике много трудных задач, а есть и такие, решения которых еще никому не удалось найти.

Сколько вариантов у понятия «вариант»

Теперь мы хотим предупредить об одной особенности комбинаторики: в ней исключительно большую роль играет точная формулировка (и точное понимание) задачи. Именно с этим связано большинство ошибок начинающих, да и не только начинающих; в некоторых задачниках можно встретить задачи, некорректные ввиду неопределенности формулировки.

Разумеется, никакой неопределенности не возникает, когда речь идет о том, чтобы подсчитать число учеников в классе или число окон в комнате. Но когда речь идет о числе различных вариантов (или способов), ситуация бывает куда менее определенной. Приведем пример.

Задача 2. *Сколькими способами можно распределить три конфеты между тремя лицами?*

Тут впору искать ответ на другой вопрос: сколькими способами можно понимать эту задачу. В зависимости от ответа на него возможны шесть разных ответов на поставленный вопрос – 1, 3, 5, 6, 10, 27!

Первый источник неопределенности – термин «распределить». Можно ли сказать, что конфеты распределены между тремя лицами, если, скажем, все они отданы одному? Примем, так сказать, социально-справедливый вариант распределения. Если же понимать распределение в широком смысле слова, по-прежнему считая конфеты тождественными, получаем 10 вариантов – 3 варианта типа (3,0,0) (когда все конфеты отдаются кому-либо из трех) + 6 вариантов типа (2,1,0) + 1 вариант типа (1,1,1). Если же вдобавок и все конфеты различны, получаем максимальное число $3^3 = 27$ вариантов. Другие ответы предоставляем читателю получить самостоятельно. Отметим лишь, что цифры 3 и 5 получаются, если считать неразличимыми людей, что не особенно естественно (но становится вполне естественным при замене людей тремя одинаковыми коробками).

Некоторая расплывчатость понятия о числе вариантов связана с тем, что варианты – умозрительные понятия, их нельзя увидеть непосредственно (если нет перечня). Полезно поэтому мысленно представить себе полный перечень различных вариантов (закодированных каким-либо образом). Число вариантов при этом превращается в число записей. А это уже нечто материальное и может интерпретироваться, например, как количество ячеек машинной памяти. Такая мысленная «материализация» не имеет, конечно, ничего общего с решением задачи прямым подсчетом, требующим отнюдь не мысленного, а реального составления перечня. Да и речь идет не о решении, а лишь о лучшем понимании постановки задачи.

Итак, Главное Правило Комбинаторики:

прежде чем подсчитывать число различных вариантов, необходимо точно выяснить смысл слов «различные варианты».

Само по себе это правило не позволит решить ни одной задачи, зато поможет избежать путаницы и недоразумений при решении множества задач.

Принцип сложения

Мы обсудили некоторые общие особенности комбинаторики. Теперь можно переходить к конкретным способам подсчета. Начнем с простейшего.

Если все варианты делятся на k взаимоисключающих типов, причем имеется n_1 вариантов 1-го типа, n_2 вариантов 2-го типа, …, n_k вариантов k-го типа, то общее число вариантов есть $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Мы фактически уже применяли этот «принцип сложения». Он совершенно очевиден и выделен, главным образом, для того, чтобы читатель мог сопоставить его с «принципом умножения» (см. ниже).

Кортежи, или упорядоченные наборы

Кортеж длины m

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \qquad (1)$$

– это просто *упорядоченный набор* (или, что то же, конечная последовательность) *m элементов произвольной природы, при этом a_k называется k-й компонентой кортежа* (1). Если все компоненты – числа, то кортеж длины m называется также m-мерным вектором. Если все компоненты – буквы некоторого алфавита, то кортеж длины m называется также m-буквенным словом в этом алфавите. Лингвистическая сторона дела здесь не учитывается; так, ЙЙЬЪ – 4-буквенное слово в русском алфави-