Струна рояля и солнечный свет

А.СТАСЕНКО

Доколе свет с вами, веруйте в свет,
да будете сынами света.
Евангелие от Иоанна 12:36

Почему музыкальные инструменты издают так называемые *музыкальные* звуки, а не беспорядочный шум, как, например, кастрюля, по которой колотят ложкой? Это связано с тем, что инструмент порождает (генерирует) звуки не любых, а определенных частот – так называемые *монохроматические* («одноцветные») тоны.

Если частота звука ν, то его длина волны в воздухе будет $\lambda = v/\nu$, где v – скорость звука в воздухе. Длина струны рояля или гитары, так же, как и длина трубки орга́на, определенно связаны с длиной волны звука λ, который они предназначены издавать. Например, для струны эту мысль поясняет рисунок 1. На нем изображены три случая изгиба струны (три *моды*), но в любом из них на длине струны l укладывается целое число полуволн:

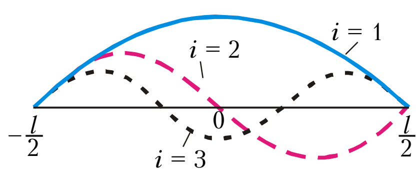

Рис.1

$$l = i\frac{\lambda_i}{2},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (1)$$

Видно, что самая большая длина волны с номером $i = 1$ равна $2l$, а все остальные (соответствующие бо́льшим значениям i) будут меньше. Сам же номер i показывает, сколько полуволн $\lambda_i/2$ умещается на длине струны.

А если это не струна, а квадратная пластинка площадью $l \times l$ (рис.2)? Тогда вдоль каждой из осей X и Y может уместиться следующее количество полуволн:

$$i = 2\frac{l}{\lambda_i} \text{ вдоль оси } X\ (i = 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$j = 2\frac{l}{\lambda_j} \text{ вдоль оси } Y\ (j = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2)$$

Причем речь тут идет не обязательно о независимых волнах, распространяющихся каждая вдоль своей оси.

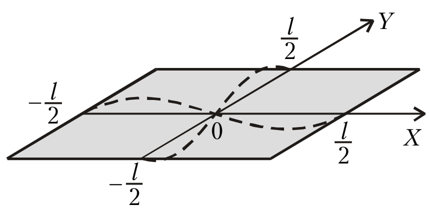

Рис.2

Ведь отрезки λ_i и λ_j могут принадлежать и одной и той же волне λ, бегущей, например, под углом α к оси X (рис.3; сплошные наклонные линии). Тогда

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{\cos\alpha} = \frac{2l}{i},\quad \lambda_j = \frac{\lambda}{\sin\alpha} = \frac{2l}{j}.$$

А как только появляются синус и косинус, возникает непреодолимое желание возвести их в квадрат и

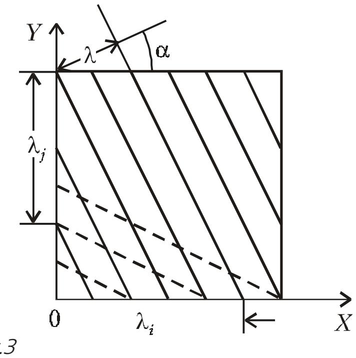

Рис.3

сложить:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \frac{\lambda^2}{4l^2}\left(i^2 + j^2\right).$$

Сразу видно, что этому соотношению удовлетворяет не единственный набор чисел i и j. Например, на рисунке 3 штриховыми линиями показана еще одна волна, для которой имеет место то же самое равенство

$$i^2 + j^2 = 4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Но ведь это – уравнение окружности радиусом R в плоскости i, j (рис.4). Правда, абсцисса и ордината здесь

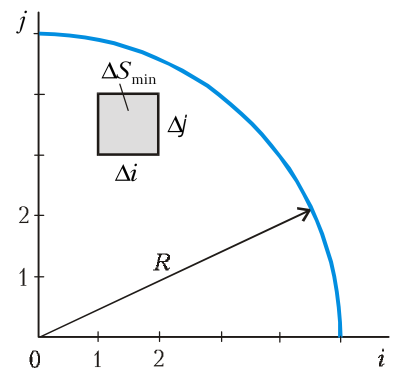

Рис.4

принимают только целочисленные значения, а площадь – «зерниста»: существует наименьшее значение $\Delta S_{\min} = \Delta i \cdot \Delta j = 1$ (закрашенный квадратик). И радиус окружности измеряется не в метрах – он принадлежит пространству безразмерных чисел. Сколько же таких квадратиков, или пар чисел i, j, помещается внутри четверти этой окружности? (Почему четверти? Потому что числа i и j положительны.) Эта четверть круга называется по-научному первым квадрантом. Ясно, что нужно эту площадь разделить на $\Delta S_{\min} = 1$ (т.е. можно и не делить). Получим

$$N \approx \frac{\pi R^2/4}{1} = \pi\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 .$$

(Знак «$\approx$» напоминает, что пол в круглой башне трудно выложить квадратными плитками.)

Перейдем теперь от пластинки к пространственной фигуре. Пусть это будет куб (значит, его высота тоже равна l). Теперь звуковые волны могут распространяться не только вдоль осей X и Y, но и вдоль оси Z. Тогда к соотношениям (2) нетрудно добавить еще одно равенство

$$k = 2\frac{l}{\lambda_k} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

так что соотношение (3) примет вид

$$i^2 + j^2 + k^2 = 4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2,$$

и мы получим уравнение сферы в системе координат $i,\ j,\ k$ (рис.5). Это пространство тоже «зернисто» (как и

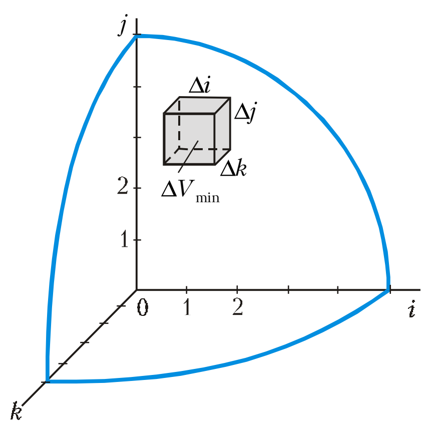

Рис.5

плоскость $i,\ j$): наименьший объем равен $\Delta V_{\min} = \Delta i \cdot \Delta j \cdot \Delta k = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Значит, внутри осьмушки шара радиусом R (догадываетесь, почему осьмушки?), или, по-ученому, первого октанта, помещается число этих объемных «зерен», равное

$$N \approx \frac{(1/8)\left(4\pi R^3/3\right)}{1} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^3 . \quad (4)$$

Чем меньше λ, тем больше N. Но каждое «зерно» – набор трех чисел $i,\ j,\ k$ – описывает отдельную волну. Значит, мы нашли и общее количество мод – стоячих волн (с длиной, не превосходящей λ) – внутри куба со стороной l.

Но музыкальны не только звуки. «Музыкальны» и электромагнитные волны, например видимый свет, и эта его «музыкальность» называется цветом, и она тоже характеризуется определенной частотой ν или длиной волны $\lambda = c/\nu$, где c – скорость света. Аналогом трубки органа или струны рояля в этом случае может служить лазер, генерирующий монохроматическую волну. Если расстояние между его двумя зеркалами равно l, то он выдает длину волны, описываемую формулой (1).

А как сделать куб, заполненный излучением? Выкачаем все, что можно (воздух, пары воды, углекислый газ...), из объема l^3. И что же, этот объем окажется пустым? Совсем нет. Он как раз и будет наполнен так называемым равновесным излучением, соответствующим температуре его стенок T. При этой температуре стенки будут генерировать в единицу времени столько же лучистой энергии, сколько и поглощать. Каждый кубический сантиметр этого объема будет пронизан электромагнитными волнами, бегущими во всех направлениях. Причем это будут самые разные волны: ..., ультрафиолетовые, видимый свет, инфракрасное излучение, радиоизлучение, ... Конечно, радиоволны не должны иметь длину волны больше чем $2l$.

Понятно, что такая нагретая «печка» будет очень слабой радиостанцией, дающей в основном так называемое тепловое (инфракрасное) излучение, но в мартеновских печах, раскаленных до температуры порядка 1000 К, – и видимое (еще более коротковолновое) излучение тоже. Длины электромагнитных волн в этих диапазонах составляют от долей до единиц микрон, поэтому расстояние между двумя соседними линиями (длинами волн) λ_i и λ_{i+1}, определяемыми условием (1), очень малу, и набор значений длин волн (или частот) можно считать не дискретным (перенумерованным), а непрерывным. Тогда на основании соотношения (4) можно сказать, что количество равновесных электромагнитных колебаний, заполняющих объем l^3 «печки», равно

$$N(\lambda) \approx \frac{4\pi l^3}{3\lambda^3} = \frac{4\pi l^3}{3c^3}\nu^3 = N(\nu). \quad (5)$$

Но, как известно, каждый фотон с частотой ν несет энергию $h\nu$ (здесь h – постоянная Планка). Равновесное излучение иногда называют «газом фотонов». Оно похоже на газ тем, что фотоны, как и молекулы, летают во всех направлениях. Но, в отличие от молекул, фотоны не сталкиваются друг с другом, а «сталкиваются» лишь со стенками объема. Кроме того, их скорости одинаковы (равны скорости света), так что они, как говорят физики, *распределены по частотам* (а молекулы газа распределены по скоростям). А какова средняя энергия фотонов?

Рассмотрим прежде обычный газ. Пусть концентрация его молекул n, масса каждой молекулы m. Как известно, при температуре T средняя кинетическая энергия молекулы газа $\frac{m\langle v^2\rangle}{2}$ пропорциональна $k_Б T$ (здесь $k_Б$ – постоянная Больцмана):

$$\frac{m\langle v^2\rangle}{2} \sim k_Б T . \quad (6)$$

Значит, объемная плотность энергии этого газа равна

$$n\frac{m\langle v^2\rangle}{2} \sim nk_Б T = p ,$$

где p – давление.

Вспомним еще распределение молекул газа по высоте в атмосфере (формулу Больцмана):

$$n = n_0 e^{-\frac{mgy}{k_Б T}} .$$

Из этой формулы для характерной высоты атмосферы, на которой концентрация молекул в e раз меньше, чем у поверхности, получается такая оценка:

$$H_e = \frac{k_Б T}{mg} = \frac{RT}{\mathrm{M}g} =$$

$$= \frac{8{,}31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}\ \text{м} \approx 8{,}8\ \text{км} .$$

На этой высоте потенциальная энергия равна $mgH_e = k_Б T$. Любопытно, что это значение является одновременно средней потенциальной энергией молекул изотермической атмосферы:

$$\langle mgy\rangle = k_Б T \quad (\text{или } H_e = \langle y\rangle). \quad (7)$$

Согласно общему определению среднего, имеем

$$\langle mgy\rangle N = mg\int_0^\infty y\,dn(y) ,$$

где N – общее число молекул в столбе атмосферы, опирающемся на единичную площадку:

$$N = \int_0^\infty dn(y).$$

Это соотношение можно переписать и так:

$$\langle mgy \rangle = mg \frac{\int_0^\infty y\,dn(y)}{\int_0^\infty dn(y)}.$$

Знаменатель этого выражения равен $n(\infty) - n(0) = 0 - n_0 = -n_0$ (учтено, что $n(\infty) = 0$, т.е. на бесконечности концентрация равна нулю). Числитель легко найти, воспользовавшись тождеством

$$d(yn) = y\,dn + n\,dy\,,$$

откуда

$$\int_0^\infty y\,dn(y) = \int_0^\infty d(yn) - \int_0^\infty n\,dy =$$

$$= yn\Big|_{y=0}^{\infty} - n_0 \int_0^\infty e^{-\frac{mgy}{k_Б T}} d\left(y\frac{mg}{k_Б T}\right)\left(\frac{k_Б T}{mg}\right) =$$

$$= 0 - n_0 \frac{k_Б T}{mg}.$$

В результате

$$\langle mgy \rangle = k_Б T\,.$$

Формулы (6) и (7) показывают, что средние значения как кинетической, так и потенциальной энергий молекул газа порядка $k_Б T$. Этот результат оказывается верным и в любом другом случае, когда имеет место термодинамическое равновесие большого количества участников хаотического движения.

А что же равновесное излучение в печке? Согласно условию (1), наибольшая длина волны равна $\lambda = 2l$, так что для характерного размера печки $l \sim 1$ м получим $\lambda_{max} \sim 2$ м. Это длина радиоволнового диапазона. Наименьшая длина волны может быть любая, в том числе и из рентгеновского диапазона. Но, конечно, никто не рассматривает печку в качестве радиостанции или рентгеновского аппарата. Из широкого набора частот какое-то значение ν_* при данной температуре будет наиболее характерным (чаще всего встречающимся среди фотонов, наиболее вероятным, средним – или придумайте еще какое-либо слово). Сказанное выше позволяет ожидать, что соответствующая энергия фотонов равновесного излучения тоже будет порядка $k_Б T$, т.е.

$$h\nu_* \sim k_Б T\,, \qquad (8)$$

а распределение энергии излучения по частотам будет иметь вид колоколообразной кривой (рис.6). Эта кривая показывает, что в области очень

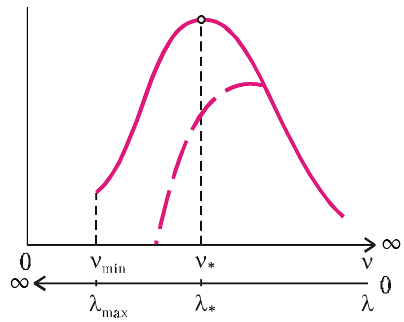

Рис.6

больших и очень малых частот заключено мало энергии, а больше всего – в окрестности характерной частоты $\nu_* \sim k_Б T/h$. Таким образом, полную энергию равновесного излучения в объеме печки можно оценить выражением

$$U \sim N(\nu_*) \cdot h\nu_* \sim \frac{l^3}{c^3} h\nu_*^4,$$

а плотность энергии (энергию единицы объема) – выражением

$$u = \frac{U}{l^3} \sim \frac{1}{c^3 h^3}\left(k_Б T\right)^4. \qquad (9)$$

Собственно, ради этой зависимости

$$u = \alpha T^4$$

мы и трудились так долго, чтобы не заявлять просто: дескать, существует такой закон имени Стефана и Больцмана – и все тут. (Сразу же отметим, что полученные выражения отражают только размерность искомых величин. Правильное распределение фотонов по частотам описывается так называемой формулой Планка, содержащей безразмерный множитель $1\Big/\left(e^{h\nu/k_Б T} - 1\right)$, – см., например, самый первый номер журнала «Квант». Но для наших целей и этого достаточно, поскольку упомянутая правильная квантово-механическая формула не изменит размерности величины u.)

Можно сделать и еще одно очень полезное наблюдение – оценить энергию, излучаемую в единицу времени с единицы поверхности нагретого тела. Поскольку мы говорим здесь о равновесном излучении, то, как уже отмечалось выше, сколько энергии излучается, столько же и падает. Но если плотность энергии равна u, то, умножив ее на скорость распространения (а это скорость света c), мы получим *плотность потока энергии* uc (с размерностью $\left(Дж/м^3\right)(м/с) = Дж/\left(м^2 \cdot с\right)$); а коль скоро фотоны летают во всех направлениях с равной вероятностью, грамотный школьник сразу скажет, что в направлении *к поверхности* тела должна двигаться $1/6$ часть всех фотонов (так как это одно из шести направлений: вперед – назад, вверх – вниз, вправо – влево). Значит, плотность потока энергии *от поверхности* будет равна

$$q = \frac{1}{6} uc \sim \frac{k_Б^4}{c^2 h^3} T^4. \qquad (10)$$

Это тоже закон Стефана—Больцмана.

Еще более грамотный студент скажет, что нужно написать не $1/6$, а $1/4$, и будет совершенно прав; но эти тонкости сейчас не существенны. Главное, что мы получили не только закон Стефана—Больцмана $u = \alpha T^4 \sim q = \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана—Больцмана, но и нетривиальную связь коэффициентов пропорциональности в этом законе с фундаментальными физическими константами:

$$\alpha \sim \frac{k_Б^4}{c^3 h^3}\,,\quad \sigma \sim \frac{k_Б^4}{c^2 h^3}.$$

Точное значение σ: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Дж$/\left(м^2 \cdot с \cdot К^4\right)$. Заметим, что эти комбинации фундаментальных констант можно получить (как это не раз и делалось в популярной литературе) на основе соображений размерностей, если известен набор относящихся к делу величин: h, $k_Б$, c. Мы же здесь постарались этот набор обосновать.

Видно, что зависимость q от T очень крутая: при увеличении температуры, скажем, в 2 раза, плотность потока излучения возрастает в 16 раз!

Получив в распоряжение этот закон, было бы обидно не использовать его тут же. Например, можно, оказывается, оценить температуру поверхности Солнца $T_С$, зная только, под каким углом $\theta_С = D_С/L$ виден его диаметр $D_С$, и среднюю температуру Земли $T_З$ (здесь L – расстояние между Солнцем и Землей). Действительно, со всей поверхности Солнца излучается в единицу времени энергия

$$Q_С = q_С \cdot 4\pi R_С^2 = \sigma T_С^4 \pi D_С^2.$$

Диск Земли площадью $\pi R_З^2$ «перехватывает» только малую долю этой энергии, равную $\left(\pi R_З^2\right)/\left(4\pi L^2\right)$. И вся эта перехваченная энергия излучается Землей со всей ее поверхности $4\pi R_З^2$. Приравнивая падающую на Землю энергию Солнца и энергию, излучаемую Землей, получим

$$\sigma T_С^4 \pi D_С^2 \frac{\pi R_З^2}{4\pi L^2} = 4\pi R_З^2 \sigma T_З^4.$$

Как видим, в этом примере даже не важно знать величину σ — она сокращается. Отсюда

$$T_С = T_З \sqrt[4]{\frac{16}{\left(D_С/L\right)^2}} = T_З \frac{2}{\sqrt{\theta_С}}.$$

Подставляя $T_З \approx 300$ К, $\theta_С \approx 0{,}5° \approx \approx 10^{-2}$ рад, находим

$$T_С \approx 20 T_З = 6000 \text{ К}.$$

Затем, зная температуру Солнца, можно оценить площадь солнечного паруса космического летательного аппарата, который давал бы, к примеру, силу тяги в 1 ньютон. Пусть он находится на таком же расстоянии от Солнца L, что и Земля, и пусть его поверхность покрыта тонким зеркальным слоем. Тогда каждый фотон, упав под прямым углом на парус и отразившись от него, изменит свой импульс на величину $h\nu/c - -(-h\nu/c) = 2h\nu/c$. Поскольку на всю площадь S паруса падает в единицу времени энергия (см. предыдущие рассуждения)

$$Q_{\downarrow} = \sigma T_С^4 \pi D_С^2 \frac{S}{4\pi L^2},$$

то, чтобы найти *поток импульса* всех фотонов (силу F), осталось разделить на c и умножить на 2:

$$F = \frac{2Q_{\downarrow}}{c} = \frac{2}{c}\sigma T_С^4 \theta_С^2 \frac{S}{4}.$$

Отсюда

$$S = \frac{4Fc}{2\theta_С^2 \sigma T_С^4} \approx$$

$$\approx \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 6000^4} \text{ м}^2 \sim 10^5 \text{ м}^2.$$

Это почти десять гектаров, говоря сельскохозяйственным языком!

А теперь, зная температуру Солнца, можно уточнить соотношение (8). Учитывая, что $\nu_* = c/\lambda_*$, перепишем его в виде

$$\lambda_* T \sim \frac{hc}{k_Б}.$$

Получаем, что произведение температуры и характерной длины излучения есть некоторая постоянная, состоящая из фундаментальных констант физики. Поскольку температура Солнца примерно 6000 К, а характерная длина волны видимого света порядка 0,5 мкм, эта постоянная оказывается равной приблизительно $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м $\cdot$ 6000 К $= 3 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К. Соотношение между температурой и характерной длиной волны излучения, называемое законом Вина, является универсальным. Из него следует, в частности, что все предметы при комнатной температуре $T \approx 300$ К излучают в основном на длине волны $\lambda_* \approx 3 \cdot 10^{-3}/300$ м $= 10$ мкм, т.е. в инфракрасной области. Поэтому их и не видно «в темноте» (человеческим глазом). Но на их фоне без труда можно было бы рассмотреть «теплого» человека-невидимку при помощи специальных приборов (тепловизоров).

Наконец, можно сделать еще один вывод из приведенных выше соображений. Очень маленькая печка или пылинка, нагретые до некоторой температуры, в условиях термодинамического равновесия должны излучать набор длин волн, ограниченный условием (1): самая большая длина волны будет порядка размеров пылинки. Значит, спектр частот излучения будет «обрезан» со стороны малых частот (что показано качественно на рисунке 6 штриховой кривой), т.е. сдвинут в область «фиолетового» участка спектра. Следовательно, если бы удалось нагреть пылинки до температуры поверхности Солнца, они казались бы (в видимой области) тем более синими, чем меньше их размер.

Все эти соображения учитываются во многих областях науки и человеческой практики, например – при исследовании энергетического баланса звездных и планетных атмосфер, металлургических топок, ракетных струй и т.п.