Решения задач М1666—М1675, Ф1683—Ф1687

М1666. *Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них найдутся 4 параллелепипеда, объем каждого из которых не превосходит 1/8.*

Восемь параллелепипедов имеют одну общую вершину – это точка пересечения трех разрезающих плоскостей. Каждые два из них, имеющих только одну общую вершину, назовем парой. Если длины трех определяющих ребер параллелепипеда равны $1/2 + x$, $1/2 + y$, $1/2 + z$, то длины соответствующих ребер парного к нему параллелепипеда равны $1/2 - x$, $1/2 - y$, $1/2 - z$. В силу чего произведение объемов двух параллелепипедов, составляющих пару, удовлетворяет неравенству

$$V_1 \cdot V_2 = \left(1/4 - x^2\right)\left(1/4 - y^2\right)\left(1/4 - z^2\right) \leq 1/64 .$$

Но тогда хотя бы один из этих объемов не превосходит $1/8$.

Так как 8 параллелепипедов распадаются на 4 пары, то в каждой паре найдется хотя бы один параллелепипед с объемом, не превосходящим $1/8$.

Д.Кузнецов

М1667. *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.*

Так как обе части бесконечны, то найдется бесконечное число пар последовательных натуральных чисел таких, что меньшее число в каждой паре принадлежит первой части, а большее – второй. Точно так же найдется бесконечное число пар последовательных натуральных чисел таких, что большее число в каждой паре принадлежит первой части, а меньшее – второй.

Ввиду этого ясно, что найдется 50 пар первого типа и 50 пар второго типа таких, что все 100 пар попарно не пересекаются. Итого имеем 200 натуральных чисел, 100 из которых принадлежит первой части, а другие 100 – второй, при этом их суммы равны.

В.Произволов

М1668. *Имеется n бочек, содержащих 1, 2, …, n литров воды соответственно. Разрешается доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а) $n = 10$; б) n – любое число?*

а) **Ответ**: 54 литра. Всю воду (55 литров) нельзя слить в одну бочку. Если бы удалось всю воду слить в одну бочку, то последняя операция состояла бы в сливании двух одинаковых количеств в одно, и получилось бы, что число 55 четно, что неверно.

Получить 54 литра в одной бочке и 1 литр в другой можно, слив сначала всю воду в две бочки и, манипулируя ими, собрать в одной из них 54 литра. Покажем один из способов достижения этой цели. Дополнив из третьей бочки первую, получаем ситуацию (2, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10); затем, удваивая количество воды в первых трех бочках, получим (4, 4, 4, 4, 3, 4, 5, 8, 9, 10). Из бочки с 9 литрами перельем воду в бочку с 5 литрами и после этого объединим воду бочек, содержащих по 10 литров. Затем опустошим три из бочек, в которых по 4 литра, и уберем их. Получим набор (8, 8, 8, 8, 3, 20). Объединив воду бочек с 8 литрами, получим (32, 3, 20). После чего проводим переливания: (32, 3, 20) $\to$ (12, 3, 40) $\to$ (24, 3, 28) $\to$ (24, 6, 25) $\to$ $\to$ (24, 12, 19) $\to$ (24, 24, 7) $\to$ (48, 0, 7). Уберем пустую бочку и продолжим: (48, 7) $\to$ (41, 14) $\to$ $\to$ (27, 28) $\to$ (54, 1), что и требовалось получить.

б) Всего в бочках $k = n(n+1)/2$ литров воды. Если k нечетное, то, как и в пункте а), легко убедиться, что в одну бочку можно собрать не более $k - 1$ литров воды. Пусть k – четное число, убедимся, что в одну бочку нельзя собрать всю воду. Для этого применим обратный ход и посмотрим, как выглядит операция обратная к доливанию. Она выглядит так: воду в какой-то бочке делят пополам, после чего две половинки или оказываются в отдельных бочках, или одну из них вливают в какую-то не пустую бочку (а другую половинку оставляют в отдельной бочке).

В результате таких операций из бочки с k литрами воды можно получить только бочки, в которых $mk/2^S$ литров воды при некоторых натуральных m и S (поскольку есть только деление на 2 и сложение). Значит, в таком виде, в частности, должно представляться и число 1, но число 1 не представляется в таком виде, так как k не является степенью двойки.

При четном k в одну бочку нельзя собрать не только k литров воды, но и $k - 1$ литр воды, так как $k - 1$ нечетное число, а последняя операция перелива могла быть только удвоением.

Таким образом, в случае четного k в одну бочку можно собрать не более $k - 2$ литра воды, а в случае нечетного k – не более $k - 1$ литра воды. Осталось убедиться, что эти оценки сверху достижимы. Схема алгоритма достижения такова. Имея две бочки с a и b литрами воды, где $a + b$ нечетно и $a \equiv 2^m \bmod (a+b)$ при некотором натуральном m, мы можем получить в этих бочках после переливаний 1 и $a + b - 2$ литров воды, затем 2 и $a + b - 2$. Далее, воспользовавшись бочкой с 2 литрами воды, «всосем» еще 2 литра из остальных бочек и получим в этих двух бочках 4 и $a + b - 2$ литров воды и т.д.

Таким образом, начав с бочек, в которых 1 и 2 литра воды, будем «всасывать» из остальных по 2 литра, пока во всех остальных бочках в сумме останется 1 или 0 литров воды.

Р.Женодаров, Г.Челноков

М1669. *Натуральные числа a, b и c таковы, что ab + + bc = ca. Докажите равенства*

$$\text{НОК}(a,\ b) = \text{НОК}(b,\ c) = \text{НОК}(c,\ a)$$

(НОК – наименьшее общее кратное).

Докажем, что наименьшее общее кратное трех чисел a, b и c равно наименьшему общему кратному любых двух из них, например чисел a и b: НОК(a, b, c) = НОК(a, b). Этого будет достаточно. Очевидно, что число c является делителем произведения ab. Для нашей цели достаточно доказать, что число c является делителем НОК(a, b). Пусть p^m – сомножитель в разложении числа c на простые множители. При этом p^n – сомножитель в разложении числа a, а p^k – сомножитель в разложении числа b, и $n + k \ge m$. Предположим, что $\max(n, k) > m$. Так как $ab = c(a - b)$, то левая часть равенства делится на p^{n+k}, а правая – на $p^{m+\min(n,k)}$. Но $n + k < m + \min(n, k)$ – получили противоречие. Значит, $\max(n, k) \ge m$, и все доказано.

Дополнительно получим следствие из утверждения задачи. Сначала вспомним, что для любой пары натуральных чисел x и y справедливо равенство

$$\text{НОК}(x,\ y) \cdot \text{НОД}(x,\ y) = xy.$$

Тогда следствие выглядит так: если натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству $ab + bc = ca$, то имеет место равенство

$$\text{НОД}(a,\ b) + \text{НОД}(b,\ c) = \text{НОД}(c,\ a).$$

В.Произволов

М1670. *В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри ABCD. Докажите, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.*

а) Докажем, что если около $ABCD$ можно описать окружность, то $S_{APB} = S_{CPD}$. Действительно, в этом случае серединные перпендикуляры к непараллельным сторонам AB и CD пересекаются в центре описанной окружности, т.е. $PA = PB = PC = PD$ (рис.1). Кроме того, $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$, так как $90^\circ = \angle AOB = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD}\right)$. Значит, $\sin\angle APB = \sin\angle CPD \Rightarrow S_{APB} = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot \sin\angle APD = \frac{1}{2} PC \cdot PD \cdot \sin\angle CPD = S_{CPD}$.

б) Докажем, что если $S_{APB} = S_{CPD}$, то около $ABCD$ можно описать окружность.

Пусть это не так, тогда, без ограничения общности, $PA = PB > PC = PD$. Проведем окружность радиуса PA с центром в точке P. Пусть она пересечет второй раз прямую AC в точке K, BD – в точке L (рис.2). Тогда K и C лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из P на AC (так как A и C, а также A и K лежат по разные стороны от него), значит, C между A и K. Так же L и D лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из P на BD, и D лежит между B и L. Тогда точка P и отрезок KL лежат по разные стороны от прямой CD. Отсюда следует, что если PH и PH_1 – высоты треугольников CPD и KLP соответственно, то $PH_1 >$

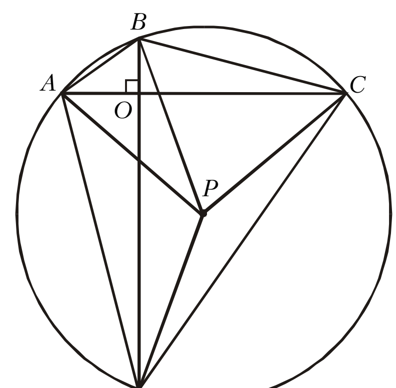


Рис.1

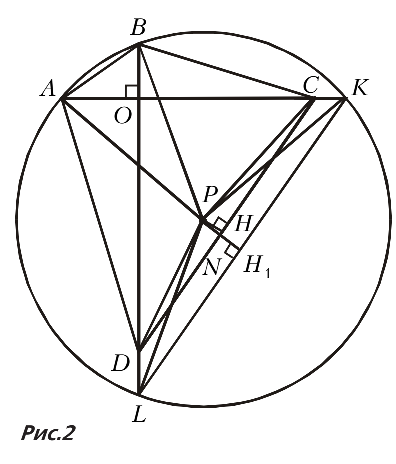


Рис.2

$> PN \geq PH$ $(N = PH_1 \cap CD)$. Кроме того, $CD < KL$, поэтому $S_{KPL} = \frac{1}{2} PH_1 \cdot KL > \frac{1}{2} PH \cdot CD = S_{CPD}$. Но, согласно а), $S_{KPL} = S_{APB}$, т.е. $S_{APD} > S_{CPD}$ – противоречие, значит, $PA = PB = PC = PD$, что и требовалось доказать.

И.Анно

М1671. *На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b – нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Назовем *тройкой* двух судей и одного участника, если оценки, выставленные ему этими судьями, совпадают. Пусть l – количество различных троек. Оценим l. С одной стороны, по условию, для любых двух судей существует не более k троек, включающие этих судей, поэтому

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq l \qquad (1)$$

($\frac{b(b-1)}{2}$ – количество неупорядоченных пар судей).

С другой стороны, если b_1 – количество судей, поставивших некоторому определенному участнику оценку «удовлетворительно», b_2 – «неудовлетворительно», то этот участник входит в состав $\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2}$ троек. Но $b = b_1 + b_2$ – нечетное число, поэтому $|b_1 - b_2| \leq 1$ и, значит,

$$\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2} = \frac{(b_1+b_2)^2}{4} + \frac{(b_1-b_2)^2}{4} - \frac{b_1+b_2}{2} \geq \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Суммируя эти неравенства по всем a участникам, получаем

$$l \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b},$$

что и требовалось доказать.

Д.Шаповалов

М1672. *Пусть d(n) – количество всевозможных натуральных делителей числа n, включая 1 и само n. Найдите все натуральные числа k такие, что* $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ *при каком-либо n.*

Ответ: в указанном виде представимы все нечетные числа и только они.

Докажем вначале, что k – нечетно. Действительно, если $n = 1$, то $d(n) = d(n^2) = 1 \Rightarrow k = 1$. Если $n > 1$, то $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ (разложение n по степеням простых чисел), тогда $n^2 = p_1^{2r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{2r_s}$, поэтому $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$ – нечетно, так как числитель этой дроби $d(n^2) = (2r_1+1) \cdot \ldots \cdot (2r_s+1)$ – нечетное число.

Значит, $k = 2m + 1$. Индукцией по m докажем, что для каждого нечетного k найдется n такое, что $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$, т.е.

$$k = \frac{(2r_1+1) \cdot \ldots \cdot (2r_s+1)}{(r_1+1) \cdot \ldots \cdot (r_s+1)}. \qquad (*)$$

База индукции: $m = 1$. $2m + 1 = 3 = \frac{(2 \cdot 4+1) \cdot (2 \cdot 2+1)}{(4+1) \cdot (2+1)}$.

Индукционный переход: пусть для всех $m < M$ каждое число $2m+1$ представимо в виде дроби (*). Докажем, что число $k = 2M + 1$ также представимо.

Пусть $k + 1 = 2^l \cdot t$, где t – нечетно, тогда $t = \frac{k+1}{2^l} \leq \frac{k+1}{2} < k$, так как $l \geq 1$ и $k > 1$. Рассмотрим числа $r_1, \ldots, r_l$ вида $r_1 = 2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0$, $r_2 = 2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1$, …, $r_l = 2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1}$, тогда для $n_1 = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{r_l}$

$$k_1 = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} =$$

$$= \frac{(2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1)}{(2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1} + 1)} =$$

$$= \frac{2^{2l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1}{2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1} = \frac{(2^l - 1)(2^l \cdot t - 1)}{(2^l - 1)t} = \frac{2^l \cdot t - 1}{t}.$$

По предположению индукции, так как $t < k$, найдется число $n_2 = q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s}$ такое, что t представимо в виде $t = \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)}$. Выбрав различные простые числа $p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_s$, мы получаем, что для $n = n_1 \cdot n_2$

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} \cdot \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)} = k_1 \cdot t = 2^l \cdot t - 1 = k.$$

Переход выполнен.

В.Дремов, Н.Дуров

М1673*. *Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис. 1). Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников – красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.*

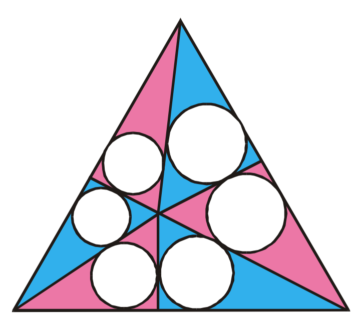


Рис. 1

Доказательство опирается на два вспомогательных утверждения.

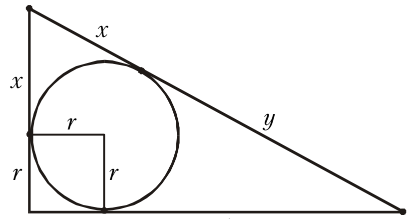


Рис.2

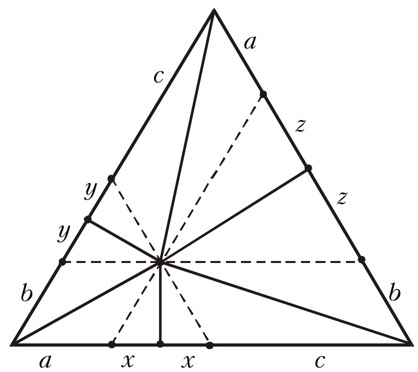


Рис.3

1. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме длин катетов минус длина гипотенузы.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 2.

2. Сумма длин катетов красных треугольников, лежащих на сторонах равностороннего треугольника, равна сумме длин катетов синих треугольников, лежащих на тех же сторонах.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 3.

Теперь, применив первое вспомогательное утверждение к синим и красным треугольникам с учетом второго вспомогательного утверждения, мы получаем требуемое.

В.Произволов

М1674. *Функция f(n) определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет условиям*

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n-1, \text{если } n \text{ четное;} \\ 2n+1, \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Найдите значение f(1999).

Так как $f(n)$ определена на множестве натуральных чисел, а $f(f(n))$ тоже определена, то естественно заключить, что значения $f(n)$ принадлежат натуральному ряду чисел.

Вначале рассмотрим случаи n = 1, 2:

$$f(f(1)) + f(1) = 3, \qquad f(f(2)) + f(2) = 3. \tag{1}$$

Отсюда видно, что значения $f(1)$, $f(2)$ должны принадлежать множеству {1, 2}. Если бы $f(1)$ = 1, то тогда из первого уравнения следовало бы, что $f(1)$ + 1 = 3, или $f(1)$ = 2 – противоречие.

Итак, $f(1)$ = 2, $f(2)$ = 1, что удовлетворяет обоим уравнениям (1).

Аналогичные рассмотрения при n = 3, 4 показывают, что $f(3)$ = 4; $f(4)$ = 3. Эти результаты позволяют выдвинуть предположение: для любых $n \in \mathbf{N}$

$$f(2n-1) = 2n, \qquad f(2n) = 2n-1. \tag{$*$}$$

Докажем эту гипотезу методом математической индукции. Зафиксируем некоторое число $k \ge 1$ и предположим, что свойство ($*$) выполняется для всех $n \le k$. Выведем отсюда, что оно также будет справедливо при $n = k + 1$, т.е.

$$f(2k+1) = 2k+2,$$

$$f(2k+2) = 2k+1.$$

Воспользовавшись определением функции, запишем

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) = 4k+3, \qquad f(f(2k+2)) + f(2k+2) = 4k+3. \tag{2}$$

Вообще говоря, значения $f(2k+1)$, $f(2k+2)$ могут принадлежать множеству {1, 2, ..., $2k$, $2k + 1$, $2k + 2$, ..., $4k + 3$}, но «младшие» величины 1, 2, ..., $2k$ уже «заняты» значениями $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2k)$ и должны быть отброшены. Точно так же должны быть отброшены и «старшие» значения $2k + 3$, $2k + 4$, ..., $4k + 3$, ибо в противном случае нельзя будет подобрать дополняющую до $4k + 3$ пару для значения функции $f(f(2k+1))$ или $f(f(2k+2))$. Остается лишь одна-единственная возможность $f(2k+1) = 2k + 2$; $f(2k+2) = 2k + 1$, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнениям (2).

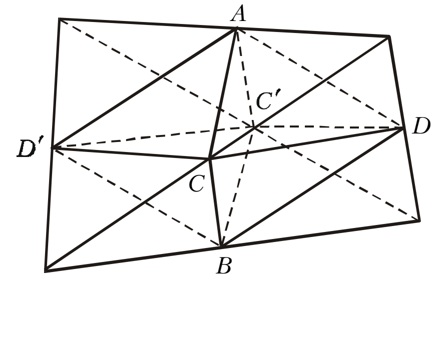
Теперь можно дать ответ на вопрос задачи:

$$f(1999) = 2000.$$

В.Кириак

М1675*. *В тетраэдре ABCD: AB = CD = 2, AC = BC = = AD = BD = $\sqrt{3}$. Докажите, что его можно разрезать а) на 8; б) на 27 подобных ему и равных между собой тетраэдров.*

а) Пусть M – середина AB. Тогда CM и DM перпендикулярны AB, $CM = DM = \sqrt{2}$. Следовательно, двугранный угол при ребре AB прямой. Двугранный угол при ребре CD также прямой, а остальные двугранные углы равны $\pi/3$ (в равногранном тетраэдре сумма косинусов двугранных углов при любой грани равна единице). Поэтому четыре тетраэдра, равных данному, можно склеить вдоль ребра AB в тело $ACDC'D'B$, состоящее из двух одинаковых правильных четырехугольных пирамид $CDC'D'A$ и $CDC'D'B$, склеенных основаниями. Ребра CD, $C'D$, CD', $C'D'$ этого тела равны 2, и двугранные углы при этих ребрах прямые. Остальные 8 ребер равны $\sqrt{3}$, и двугранные углы при них равны $2\pi/3$. Поэтому, приклеив затем к граням ACD, $AC'D'$, BCD', $BC'D$ этого тела еще по одному тетраэдру, равному данному, получим тетраэдр вдвое большего объема (см. рисунок).

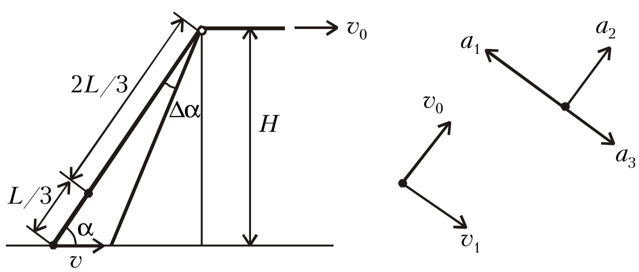


б) Расположим внутри данного тетраэдра четыре тетраэдра, полученных из него гомотетиями с центрами в его вершинах и коэффициентами $2/3$. Пересечение трех таких тетраэдров пусто, а любые два пересекаются по тетраэдру, гомотетичному данному с коэффициентом $1/3$ (центрами гомотетий будут середины ребер тетраэдра). Общий объем четырех тетраэдров равен $(4\cdot 8-6)/27 = 26/27$ объема исходного тетраэдра, а не занятая ими часть будет тетраэдром с вершинами в центрах его граней. Для завершения доказательства осталось разрезать каждый из четырех тетраэдров в соответствии с п. а).

А.Заславский

Ф1683. *Мотор на берегу равномерно наматывает на вал веревку, с помощью которой подтягивается к берегу лодка. В данный момент веревка составляет угол α с горизонтом, а скорость лодки равна v. На веревке завязан небольшой узелок – в указанный момент он вдвое ближе к носу лодки, чем к валу, на который наматывается веревка. Найдите скорость и ускорение узелка в данный момент времени.*

Скорость лодки направлена вдоль поверхности воды (см. рисунок), проекция этой скорости на направление



веревки (нити) равна постоянной по величине скорости наматывания нити на барабан v_0:

$$v_0 = v\cos\alpha .$$

За малый интервал времени Δt нить повернется на малый угол

$$\Delta\alpha = \frac{v\Delta t\sin\alpha}{L}.$$

Угловая скорость «вращения» нити равна

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v\sin\alpha}{L}.$$

Скорость узелка можно представить в виде векторной суммы поступательной скорости (вдоль нити), равной v_0, и линейной скорости вращательного движения, равной (с учетом расположения узелка в интересующий нас момент)

$$v_1 = \frac{2}{3}L\omega = \frac{2}{3}v\sin\alpha .$$

Полная скорость узелка в заданный момент будет равна

$$v_2 = \sqrt{v_0^2+v_1^2} =$$

$$= \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \frac{4}{9}v^2\sin^2\alpha} = \frac{v}{3}\sqrt{9\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}\,.$$

Для нахождения ускорения нам придется задать дополнительную величину, не указанную в условии (из заданных скорости и угла никак не удастся «составить» ускорение – размерность не позволит). Пусть нам известна высота блока H над поверхностью воды – размеры блока будем считать малыми. Ускорение узелка можно представить в виде векторной суммы трех ускорений: первое связано с поворотом вектора $\vec{v}_0$, второе – с поворотом вектора $\vec{v}_1$ и третье – с увеличением модуля скорости $\vec{v}_1$. Первое ускорение – оно перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}_0$ – равно

$$a_1 = v_0\omega = v_0\frac{v\sin\alpha}{L} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{H\cos\alpha}.$$

Второе ускорение перпендикулярно линейной скорости вращательного движения, т.е. направлено вдоль нити, и равно

$$a_2 = v_1\omega = \frac{2}{3}v\sin\alpha\cdot\frac{v\sin\alpha}{L} = \frac{2}{3}\frac{v_0^2\sin^3\alpha}{H\cos^2\alpha}.$$

Третье ускорение направлено вдоль скорости $\vec{v}_1$, т.е. перпендикулярно нити, и равно

$$a_3 = \frac{2}{3}\frac{v_0\,\mathrm{tg}(\alpha+\Delta\alpha) - v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\Delta t} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{v_0\sin\Delta\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\Delta t} = \frac{2}{3}\frac{v_0\omega}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{3}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{H\cos^3\alpha}.$$

Сложим, с учетом знаков, все ускорения и найдем модуль полного ускорения узелка:

$$a = \sqrt{(a_1-a_3)^2 + a_2^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{v^2\sin^2\alpha}{H}\sqrt{\frac{(1{,}5\cos^2\alpha - 1)^2}{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha}\,.$$

С.Варламов

Ф1684. *Для снабжения небольшого дома горячей водой применено не самое удачное устройство. Оно состоит из очень большого бака с теплоизоляцией, от которого потребители получают маленькими порциями горячую воду, и автоматического устройства, которое сразу же пополняет бак крутым кипятком. Оказалось, что при стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет +60 °С при температуре окружающего воздуха +20 °С. Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.*

Пусть за минуту жители потребляют массу воды m, тогда за это время в бак поступит такая же масса кипятка при температуре $t_1 = +100$ °С. Остывая до температуры воды в баке $t_2 = +60$ °С, кипяток отдаст количество теплоты $cm(t_1 - t_2)$, а бак отдаст столько же тепла в окружающую среду с температурой $t_3 = +20$ °С:

$$cm(t_1 - t_2) = K(t_2 - t_3)\,,$$

где K – постоянный коэффициент.

Если теперь за минуту потребляется $2m$ воды, то для новой температуры воды в баке t будет выполняться условие

$$2cm(t_1 - t) = K(t - t_3)\,.$$

Отсюда получаем

$$t = \frac{220}{3}\ ^\circ\mathrm{C} \approx 73\ ^\circ\mathrm{C}.$$

На первый взгляд, ответ странный – чем больше потребляешь, тем горячее вода. Но именно так и должно быть в такой системе – просто при увеличении потребления воды за то же время в бак доливается больше кипятка.

А.Зильберман

Ф1685. *Оцените, на какой высоте над Землей находится центр тяжести столба воздуха, нависающего над стадионом «Лужники». Когда он расположен выше – летом или зимой? При расчете можно считать, что температура воздуха на любой высоте равна температуре земной поверхности.*

Проведем несложный расчет. Пусть вначале температура газа очень мала (около нуля по шкале Кельвина), при этом вся атмосфера просто «лежит» на поверхности шара, и высота центра тяжести такого низкого столба воздуха равна нулю. Передадим теперь воздуху некоторое количество теплоты – воздух станет нагреваться и расширяться, причем каждая порция воздуха расширяется при своем неизменном давлении, которое создается весом внешних для этой порции слоев воздуха. (Тут нужно заметить, что толщина атмосферы во много раз меньше радиуса планеты и уменьшением ускорения свободного падения с высотой вполне можно пренебречь.) При таких условиях определенная часть переданного количества теплоты Q идет на повышение внутренней энергии воздуха ΔU, а остальное – на совершение механической работы A, в данном случае – на поднятие центра тяжести. Для одного моля газа

$$A + \Delta U = Q = C_p \Delta T = \left(R + C_V\right)\Delta T,$$

где C_p и C_V – молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно. В нашем случае температура увеличивается на T (от нуля до T) и работа одного моля газа при расширении равна $A = RT$. Для упомянутого в условии задачи столба воздуха для работы по поднятию его центра тяжести на высоту H можно записать

$$A = \nu \mathrm{M} g H = \nu R T,$$

где ν – число молей воздуха в указанном столбе, М – масса моля воздуха. Отсюда легко находим

$$H = \frac{RT}{\mathrm{M}g}.$$

Для летней температуры $T_1 = 300$ К получим

$$H_1 = \frac{8{,}3\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot 300\ \text{К}}{0{,}029\ \text{кг}/\text{моль}\cdot 10\ \text{м}/\text{с}^2} \approx 8{,}6\ \text{км}.$$

Для зимней температуры $T_2 = 250$ К –

$$H_2 \approx 7{,}2\ \text{км}.$$

А.Чувиков

Ф1686. *Сто батареек с одинаковыми параметрами соединили последовательно, при этом двадцать из них оказались подключены с противоположной к остальным полярностью. Концы получившейся цепочки соединили, получив замкнутое кольцо. Параллельно одной из батареек подключили вольтметр (его сопротивление во много раз больше внутреннего сопротивления батарейки), и он показал напряжение 1,6 В. Что покажет вольтметр, если его подключить к какой-нибудь другой батарейке?*

Если бы все батарейки были включены в одинаковой полярности, показания вольтметра оказались бы нулевыми – напряжение вольтметра определяется разностью ЭДС батарейки и напряжения на ее внутреннем сопротивлении:

$$U = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E} - \frac{N\mathcal{E}}{NR} = 0.$$

В нашем случае возможны различные ответы – в зависимости от того, измерялось ли напряжение на батарейке с полярностью включения такой, как у «большинства», или наоборот. В первом случае ответ может быть либо 1,6 В (если и вторая батарейка принадлежит к «большинству»), либо

$$U = -\mathcal{E} - \frac{(N-2n)\mathcal{E}}{NR}R = -\mathcal{E} - \frac{60\mathcal{E}}{100} = -1{,}6\mathcal{E}.$$

Это ровно в четыре раза больше (по модулю) величины

$$\mathcal{E} - \frac{(N-2n)\mathcal{E}}{NR}R = 0{,}4\mathcal{E},$$

которая и соответствует напряжению 1,6 В. Таким образом, вольтметр в первом случае показывает либо 1,6 В, либо 6,4 В.

Во втором случае, когда вольтметр подключался к батарейке из «меньшинства», напряжение на такой же точно батарейке будет тоже 1,6 В, а на «правильной» батарейке – в 4 раза меньше. Итак, в этом случае вольтметр может показать либо 1,6 В, либо 0,4 В.

М.Учителев

Ф1687. *Точечный источник света движется с постоянной скоростью v_0 по прямой, составляющей небольшой угол α с главной оптической осью собирающей линзы. Траектория источника пересекается с упомянутой осью на двойном фокусном расстоянии от линзы. Найдите минимальную скорость изображения в линзе относительно движущегося источника.*

При указанном в условии задачи расстоянии от линзы до точки пересечения траектории с главной оптической осью (двойное фокусное расстояние) решение получается особенно простым. Изображение движется по прямой, которая составляет тоже угол α с главной оптической осью (рис.1), так что угол между векторами скоростей источника и изображения равен 2α. Скорость изображения v_1 меняется в очень широких пределах (формально – от нуля до бесконечности), минимальное значение относительной скорости соответствует моменту, когда вектор $\vec{v}_{\text{отн}}$ перпендикулярен вектору скорости изображения $\vec{v}_1$ (рис.2). Таким образом, минимальная по величине относительная скорость равна

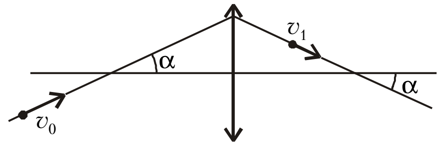


Рис.1

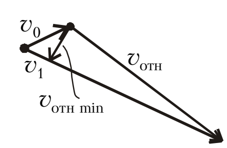


Рис.2

$$v_{\text{отн min}} = v_0 \sin 2\alpha.$$

А.Повторов