

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1691» или «Ф1698». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь. Задачи М1691–М1693 и М1695 предлагались на LXII Московской математической олимпиаде. Задачи Ф1698–Ф1702 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1691–М1695, Ф1698–Ф1702

М1691. Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.

В.Произволов

М1692. Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

В.Сендеров

М1693. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Третья окружность с центром в точке P пересекает

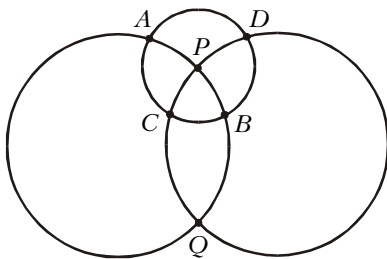


Рис.1

первую в точках A, B , а вторую – в точках C и D (рис.1). Докажите, что углы AQD и BQC равны.

А.Заславский

М1694. Парабола $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и парабола $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$,

$a > 0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.

Р.Карасев

М1695. Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.

Д.Терешин

Ф1698. На рисунке 2 вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создает на сканируемом объекте узкую освещенную полоску, а отраженный свет попадает на набор фотодатчиков, которые



Рис.2

расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.

А. Селиверстов

Ф1699. Очень легкая жесткая квадратная пластинка подвешена в горизонтальном положении на четырех одинаковых вертикальных нитях, прикрепленных к ее углам. Найдите ту область пластинки, куда можно положить точечный груз таким образом, чтобы все четыре нити в положении равновесия оказались натянутыми. Нити считать упругими, но очень слабо растяжимыми.

Р. Компанец

Ф1700. Требуется перевести идеальный газ из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой $T_2 > T_1$ таким образом, чтобы температура в течение всего обратимого процесса $1 \rightarrow 2$ не убывала, а тепло не отводилось от газа. Минимальное количество теплоты, которое передается газу в таком процессе, равно Q_1 . Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу при данных условиях проведения процесса?

О. Шведов

Ф1701. В настоящее время для проведения небольших сварочных работ иногда используют смесь водорода с кислородом, получаемую при электролизе воды. Оцените КПД устройства для электролиза воды, если напряжение между электродами одной его ячейки равно $U = 2$ В. Известно, что при сгорании $m = 2$ г водорода в кислороде выделяется $Q = 0,29$ МДж тепла.

В. Погожев

Ф1702. Параллельные рельсы длиной $2L$ закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС \mathcal{E} (рис.3). На рельсах лежит перемычка массой m ,

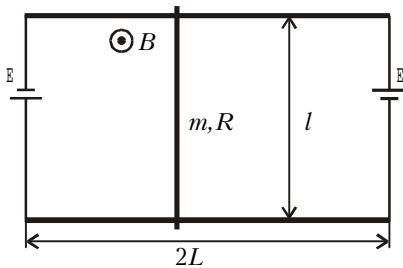


Рис.3

которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B . Считая, что сопротивление перемычки равно R , а сопротивление единицы длины рельсов равно ρ , найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.

А. Якута