Биссектрисы, вписанная и вневписанные окружности треугольника

Как известно, биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – в центре вписанной окружности. Но мало кто знает, что радиус r вписанной окружности связан с высотами треугольника соотношением

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Биссектриса угла A треугольника делит противоположную сторону на отрезки $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{b+c}$, которые относятся как прилежащие к ним стороны треугольника b и c. Сама же биссектриса делится точкой O пересечения биссектрис в отношении $(b+c):a$.

Длина биссектрисы, проведенной из вершины A, равна

$$\frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c},$$

а расстояние от точки A до центра вписанной окружности равно

$$\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}},$$

где p – полупериметр треугольника.

Нетрудно с помощью циркуля и линейки построить треугольник по его сторонам. Чуть труднее сделать это по медианам или по высотам. А построить треугольник по биссектрисам (в общем случае) невозможно.

Если провести все три биссектрисы внешних углов треугольника, то образуются три точки их пересечения, каждая из которых одинаково отстоит от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника. Поэтому можно провести окружность с центром в такой точке, касающуюся всех сторон треугольника или их продолжений. Такие окружности называются вневписанными.

Через центр вневписанной окружности проходит и биссектриса одного из внутренних углов треугольника.

Сумма величин, обратных радиусам ρ_a, ρ_b и ρ_c вневписанных окружностей (рис.1), равна обратной величине радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}.$$

Приведем два изящных выражения для площади треугольника через радиусы вписанной и вневписанных окружностей:

$$S=\sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c},\quad S=\frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b+\rho_c}.$$

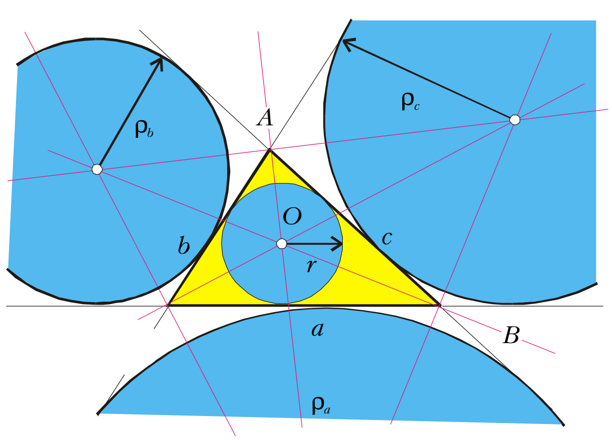

Рис. 1

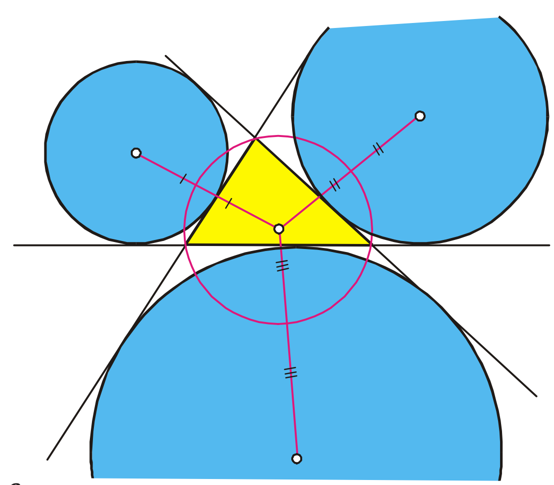
Рис. 2

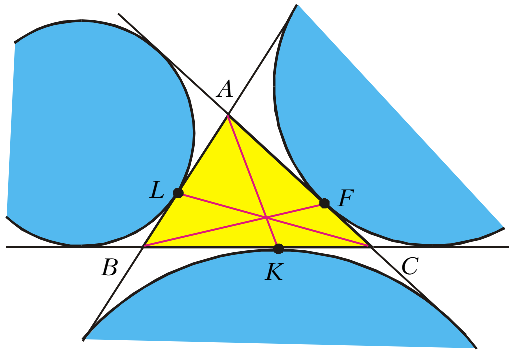

Рис. 3

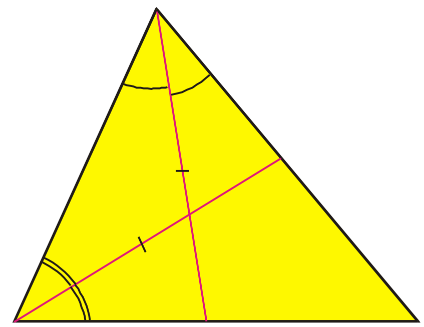
Рис. 4

Любопытно, что отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, делятся пополам окружностью, описанной вокруг этого треугольника (рис.2).

Если провести окружность через основания высот данного треугольника, то она будет проходить через середины сторон этого треугольника и через середины отрезков высот треугольника от точки их пересечения до вершин. Такая окружность называется окружностью девяти точек. Окружность девяти точек касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника.

Прямые в треугольнике, соединяющие его вершины с точками касания вневписанных окружностей (рис.3), пересекаются в одной точке, которая называется точкой Нагеля в честь открывшего ее немецкого математика Августа Нагеля (1821—1903).

Легко доказать, что у равнобедренного треугольника равны медианы, высоты и биссектрисы, выходящие из концов основания. Ненамного труднее доказать, что если две высоты или две медианы треугольника равны, то треугольник – равнобедренный (рис.4). Верно такое утверждение и для биссектрис, но его доказательство довольно сложно. Само это утверждение носит название «теорема Штрейнера—Лемуса».

На рисунке 5 построены все вневписанные окружности треугольника *ABC*. 16 точек касания вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью девяти точек, не совпадающие с вписанной и вневписанными окружностями этого треугольника, лежат на четырех окружностях S_I, S_a, S_b, S_c. На окружности S_I лежат точки касания (1), (2), (3), (4); на окружности S_a – (5), (6), (7), (8); на окружности S_b – (9), (10), (11), (12) и, наконец, на окружности S_c – (13), (14), (15), (16). Окружности S_I, S_a, S_b, S_c называются окружностями четырех точек треугольника *ABC*.

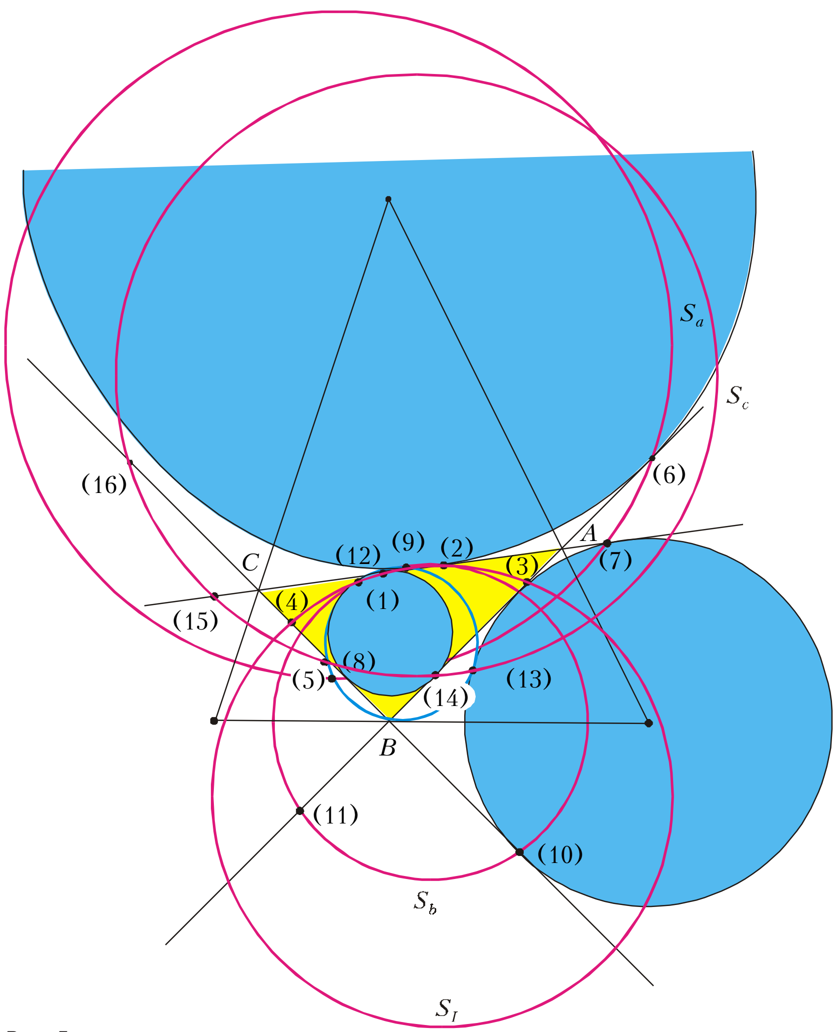

Рис. 5