Несколько задач для 11-классников

О.ИВАНОВ, Т.ИВАНОВА

В данной статье речь идет о «почти школьных задачах», в каждой из которых в формулировке имеется элемент неожиданности. По духу они близки задачам олимпиад 50–60-х годов (а некоторые просто были позаимствованы из различных сборников, содержащих варианты олимпиад тех лет).

Задача 1. *Найдите все целые k, при которых разрешимо уравнение*

$$\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\frac{k}{10}}.$$

Решение. Не следует пугаться присутствующих в условии обратных тригонометрических функций. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то после замены $t = \arcsin x$ получим уравнение

$$\sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t} = \sqrt{\frac{k}{10}},\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Полученное уравнение разрешимо, если число $\sqrt{\frac{k}{10}}$ входит в множество значений функции $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t}$. Для его нахождения можно стандартным образом исследовать функцию при помощи производной, а можно воспользоваться оценками

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}\ (a, b \ge 0);$$

заметим, что эти неравенства обращаются в равенства, соответственно, при $a = 0$ или $b = 0$ и $a = b$. Следовательно, множеством значений функции f является отрезок $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\pi}\right]$. Значит, решение исходного уравнения существует тогда и только тогда, когда $5\pi \le k \le 10\pi$, откуда получаем ответ: k = 16, 17, … …, 31.

Задача 2. *Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро – двум.*

Решение. Вместо того чтобы пытаться выразить площадь проекции через площади граней пирамиды с использованием формулы $S_{\text{пр}} = S\cos\theta$, лучше посмотреть, что представляет из себя проекция данной пирамиды. Возможны два случая. В первом из них проекция является треугольником – проекцией одной из граней пирамиды, во втором она – четырехугольник, диагоналями которого являются проекции некоторых двух скрещивающихся ребер. Ясно, что в первом случае площадь проекции наибольшая, если мы проектируем нашу пирамиду на плоскость, параллельную той ее грани, которая имеет наибольшую площадь; в нашем случае это грань со сторонами 1, 2, 2, ее площадь $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. Второй случай более интересен. Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1, d_2 – это длины его диагоналей, а α – угол между ними. Ясно, что $d_1 \le 1$, $\sin\alpha \le 1$, $d_2 \le 2$, поэтому произведение всех этих величин не превосходит двух. Осталось заметить, что поскольку скрещивающиеся ребра правильной пирамиды перпендикулярны друг другу, то при проектировании на параллельную им плоскость площадь проекции равна единице, что больше $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. Таким образом, ответ: 1.

Задача 3. *Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет далее брать только проценты с накопившейся за это время на его счету суммы? Банк дает 30% годовых; считайте, что* $\lg 1{,}3 = 0{,}114$.[1]

[1] *Прочитав формулировку задачи, один из наших коллег сказал, что ответ – «ничего», поскольку банк, который выплачивает такой процент, заведомо прогорит. И, как мы увидели на практике, он оказался прав. Но это уже совсем другая наука…*

Решение. Конечно, можно прямо подсчитать, сколько же денег на счету окажется у Ивана через 8 лет. Заметим, что проделать аналогичное вычисление при решении задачи 2, г) варианта 2 (в конце статьи) будет более затруднительно, не говоря уже о том, что делать это без калькулятора просто глупо.

Мы проведем вычисления в общем виде, воспользовавшись численными данными лишь на заключительном этапе решения. Итак, пусть a – вносимая Иваном ежегодно сумма, а α – начисляемый годовой процент. В первый год он внес a рублей, так что после начисления годовых процентов через год у него на счету будет $a + a\frac{\alpha}{100} = a\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$ рублей. Удобно ввести дополнительное обозначение $q = 1 + \frac{\alpha}{100}$, так что если некто имел на счету в начале года s рублей, то после начисления процентов у него окажется sq рублей. Вернемся к Ивану. После того, как он в конце первого года снова внес свои a рублей, у него на счету стало их $a + aq$; в конце второго года их станет (после очередного взноса) $a + (a + aq)q = a + aq + aq^2$. Теперь уже ясно, что сумма, скопившаяся на счету Ивана за 8 лет, равна $a + aq + \ldots + aq^8$, ежегодные проценты с которой составляют

$$(q-1)\left(a + aq + \ldots + aq^8\right) = a\left(q^9 - 1\right) \text{ рублей.}$$

В нашем случае $q = 1{,}3$, $q^9 = 1{,}3^9 = 10^{9\lg 1{,}3} > 10$, так как $9\lg 1{,}3 = 9 \cdot 0{,}114 > 1$. Поэтому имеется по крайней мере 90000 рублей ежегодного дохода в распоряжении Ивана и всех его будущих наследников.

Задача 4. *Докажите, что если* $a_i > 0$, $a_i c_i \ge b_i^2$ *(i = 1, 2, 3), то*

$$(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \ge (b_1 + b_2 + b_3)^2.$$

Решение. Решим задачу для произвольного количества n чисел a_i, b_i, c_i. Введем квадратные трехчлены $q_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x + c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как по условию $a_i > 0$ и $a_i c_i \ge b_i^2$, то $q_i(x) \ge 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} c_i \ge 0,$$

откуда и следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} c_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^2 .$$

Задача 5. *Решите неравенство*

$$\sqrt{|1-2x|} \ge 1 + ax .$$

Решение. Очень хотелось бы посмотреть на школьника, который сумеет записать верное решение этой задачи, не используя ее геометрической интерпретации. Насколько трудно это сделать, видно хотя бы из ответа. Чтобы он не был совсем уж неудобочитаемым, положим для краткости записи

$$x_1 = \frac{1 - a - \sqrt{1 - 2a - a^2}}{a^2},$$

$$x_2 = \frac{1 - a + \sqrt{1 - 2a - a^2}}{a^2},$$

$$x_3 = -\frac{2a + 2}{a^2}.$$

Ответ:

$x \in [0; +\infty)$ при $a \le -2$;

$x \in [0; x_3] \cup [x_1; +\infty)$ при $2 < a < -1$;

$x \in [x_3; 0] \cup [x_1; +\infty)$ при $-1 \le a < 0$;

$x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty]$ при $a = 0$;

$x \in (-\infty; 0] \cup [x_1; x_2]$ при $0 < a \le \sqrt{2} - 1$;

$x \in (-\infty; 0]$ при $a > \sqrt{2} - 1$;

решение понятно из серии графиков, изображенной на рисунке 1.

Задача 6. *Сколько различных каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?*

Решение. Давайте вначале решим более простую задачу. Предположим, что зеленые и красные стержни имеют одинаковую длину. Составим таблицу, в которой в верхней строке указано число зеленых стержней, а в нижней – число различно окрашенных пирамид с таким числом зеленых стержней:

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	2	1	1

Не кажется ли вам странным число «4» в средней клетке этой таблицы? Действительно, три зеленых стержня могут: а) выходить из одной вершины; б) образовывать треугольник; в) образовывать незамкнутую пространственную ломаную. Однако оказывается, что в случае в) имеются две различимые конфигурации, правая и левая (рис.2)!

Задача в ее исходной постановке отличается от только что разобранной

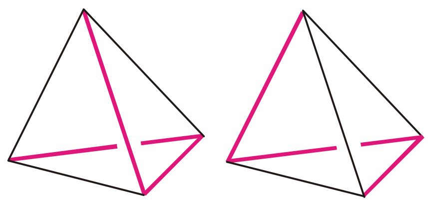

Рис. 2

тем, что в ней необходимо исследовать вопрос о существовании пирамиды с данными длинами ребер в каждом из рассмотренных выше случаев. К примеру, пирамида, в которой отрезки длиной a образуют треугольник основания, а отрезки длиной b выходят из вершины пирамиды, существуют тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$a < b\sqrt{3} . \qquad (1)$$

Поскольку в нашем случае $20\sqrt{3} > 34 > 33$, то существуют пирамиды как с зеленым, так и с красным основаниями. Далее, пирамида, в которой одно ребро имеет длину a, а остальные – длину b, также существует тогда и

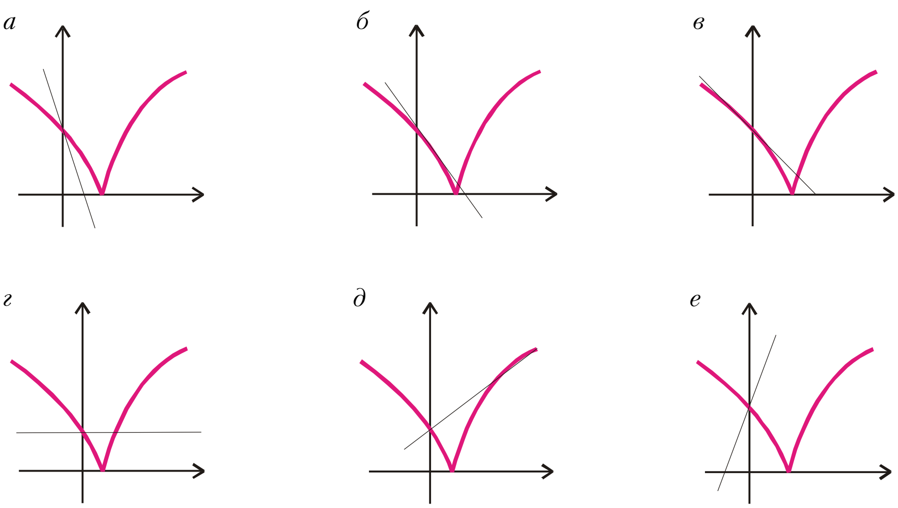

Рис. 1

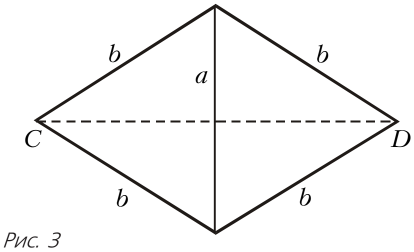

Рис. 3

только тогда, когда выполнено неравенство (1), поскольку для этого нужно, чтобы $CD < b$ (рис.3). Убедитесь, что не существует пирамиды, три ребра которой образуют незамкнутую ломаную. Наконец, есть еще один запрет, так что ответ в данной задаче: 9 пирамид.

Задача 7. *Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).*

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Два художника по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

Решение. а) Поскольку вероятность того, что одна пара противоположных граней раскрашена в противоположные цвета, равна $\frac{1}{2}$, а таких пар три, то ответ: $\frac{1}{8}$.

б) Ответ: всего имеется десять различных раскрасок. Действительно, имеется по одной раскраске с числом белых граней, равным 0, 1, 5 или 6, и по две раскраски, если таковых граней 2, 3 или 4.

в) Второй художник может действовать по следующему алгоритму: он раскрашивает грань, противоположную той, которую перед этим закрасил первый, причем красит ее противоположным цветом.

г) Ответ: $\frac{147}{1024}$. Если удалось получить это число, то «с вероятностью 1» вы рассуждали правильно…

Задача 8. *Дан многочлен* $p(x) = ax^{1998} + bx^{1917} + c$, $a \ne 0$. *Найдите все целые* a, b, c, *при которых* $p(n)$ *делится на* $(n-1)^2$ *при всех* $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Ясно, что если 1 является корнем многочлена $p(x)$ кратности не меньшей двух, т.е. $p(x)=(x-1)^2 d(x)$, то коэффициенты многочлена d суть целые числа, а потому при всех $n \in \boldsymbol{N}$ число $\frac{p(n)}{(n-2)^2}$ – целое. Далее, для того чтобы кратность корня a многочлена p была не меньше двух, необходимо и достаточно, чтобы $p(a)=0$ и $p'(a)=0$. Поэтому в условиях задачи мы получаем, что числа a, b, c должны быть решениями системы

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 1998a+1917b=0. \end{cases}$$

Поскольку $1998 = 27\cdot 74$, $1917 = 27\cdot 71$, то отсюда следует, что $a = 71k$, $b = -74k$, где число k – целое, а $c = 3k$.

Ответ — $(a,b,c) = (71k, -74k, 3k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, – верен, однако полного решения пока нами не получено. Действительно, то, что 1 – корень многочлена p кратности по крайней мере два, это *достаточное* условие делимости $p(n)$ на $(n-1)^2$! Для того чтобы показать, что задача других решений не имеет, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $p(x)$, $q(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами. Если при всех натуральных n число $p(n)$ делится на $q(n)$ (или же при некоторых значениях n оба этих числа одновременно обращаются в нуль), то многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$.*

Самое интересное в доказательстве данного утверждения состоит в том, что оно во многом основано на аналитическом, а не на алгебраическом рассуждении.

Вначале разделим $p(x)$ на $q(x)$ с остатком:

$$p(x)=d(x)q(x)+r(x), \qquad (2)$$

где степень многочлена r меньше степени многочлена q.

Предположим, что $r(x)\neq 0$. Будем далее рассматривать настолько большие числа, что $q(n)\neq 0$, $r(n)\neq 0$. Положим $k_n=\frac{p(n)}{q(n)}\in \boldsymbol{Z}$. Из равенства (2) следует, что

$$k_n-d(n)=\frac{r(n)}{q(n)}.$$

Заметим теперь, что левая часть этого равенства есть целое число, что противоречит тому, что его правая часть отлична от нуля, но стремится к нему при $n\to\infty$.

В заключение приведем для самостоятельного решения наборы задач, предлагавшихся выпускникам школ Санкт-Петербурга в 1998 году.

Вариант 1
(профильно-элитарный экзамен)

1. Дана функция $f(x)=\log_{x+1} ax$.

а) Известно, что $x = 1$ – корень уравнения $f(x) = 3$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.

б) Пусть $a=\frac{9}{2}$. Решите неравенство $f(x)\ge f\left(\frac{1}{x}\right)$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение.

г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n + 1$ (n – натуральное) имеет положительный корень, то $a > ne$.

2. Дана функция $f(x)=\sin ax \sin x$.

а) Пусть $a = 3$. Решите уравнение $\frac{f(2x)}{f(x)}=-2$.

б) Найдите все a, при которых $\int_0^{\pi} f(x)dx\ge 0$.

в) Пусть x_a – наименьший положительный корень уравнения $f(x)=\cos x$. Найдите наименьшее значение x_a.

г) Найдите все a, при которых $f(x)\ge\frac{1}{2}$ при всех $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

Дополнительная задача
(выбирается один из трех сюжетов)

3А. Даны многочлены $p(x) = ax^{1998} + b$ и $q(x) = cx^{1917} + d$, $a\neq 0$.

а) Найдите наибольшее возможное число действительных корней уравнения $p(x) = q(x)$.

б) Пусть $a = 71$, $b = 3$, $c = 74$ и $d = 0$. Решите уравнение $p(x) = q(x)$.

в) Пусть $b = 0$, $c = 1$. Найдите все целые a, d, при которых число $p(n)$ делится на $q(n)$ при всех $n\in\boldsymbol{N}$.

г) Пусть $d = 0$. Найдите все целые a, b, c, при которых разность $p(n) - q(n)$ делится на $(n-1)^2$ при всех $n\in\boldsymbol{N}$.

3Б. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

3В. Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, $a, b, z\in\boldsymbol{C}$.

а) Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если $|p(z)|\le 1$ при всех $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

Вариант 2
(олимпиада выпускников)

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник – параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если $p_1p_2 = 2(q_1+q_2)$, то по крайней мере один из квадратных трехчленов $x^2 + p_ix + q_i$, $i = 1, 2$, имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + \left|\log_2 x + 2x\right| - \log_2 x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2-\cos 2x} = \sin x - \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{|1-2x|}\ge 1+ax$.

г) Для того чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2000$. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20000$ в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых; считайте, что $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что $\angle CAD+\angle EAD+\angle FAD=90^\circ$.

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x,

(*Окончание см. на с. 35*)