«Пентиум» хорошо, а ум лучше

А.БААБАБОВ

Напрасно умный очи пучит
на жизнь дурацкую мою,
ведь то, что умный только учит,
я много лет преподаю.

И.Губерман

В СТАТЬЕ «УМ ХОРОШО, А ПЯТЬ – ЛУЧШЕ» («КВАНТ» №6 за 1998 год) И. Ф. Акулич рассказал о трех задачах, в исследовании которых помог компьютер, причем именно компьютер с процессором «Пентиум» (заграничный, быстродействующий, самый-самый хороший). При этом он сформулировал настолько интересные гипотезы, что могло показаться: пора математикам отбросить ручки и начать экспериментировать с «Пентиумом» в поиске новых истин; сотни мегагерц позволяют любому программисту встать во главе целого ученого совета, вычислительная мощь которого колоссально превышает возможности любого ученого сообщества докомпьютерной эры.

Но это только на первый взгляд. А на деле статья Акулича – яркое доказательство древней мощи математики: теоретическое рассмотрение позволяет получить во всех трех задачах точные ответы! У великого английского физика лорда Рэлея (1842–1919) не было «Пентиума», а решение первой задачи он знал!! У Леонарда Эйлера (1707–1783) не было калькулятора, а изученная им гамма-функция позволяет дать точный ответ не только во второй задаче, но и в гораздо более общих ситуациях!!!

Но хватит восклицаний. Перейдем к точным формулировкам и весьма поучительным доказательствам.

Две последовательности

В первой задаче речь идет о разбиении натурального ряда на две возрастающие непересекающиеся последовательности $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ и $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$, которые при любом натуральном n удовлетворяют условию $b_n = a_n + n$. Двигаясь по натуральному ряду, можно последовательно вычислять члены обеих последовательностей.

	b_1			b_2		b_3			b_4			b_5		b_6			b_7		b_8			b_9			b_{10}		b_{11}	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	…
a_1		a_2	a_3		a_4		a_5	a_6		a_7	a_8		a_9		a_{10}	a_{11}		a_{12}		a_{13}	a_{14}		a_{15}	a_{16}		a_{17}		

Этот процесс очень хорошо описан в статье Акулича. А именно, поскольку $a_n < b_n$, наименьшее натуральное число, т. е. 1, должно равняться a_1, откуда немедленно $b_1 = 1 + 1 = 2$. Теперь ясно, что наименьшее свободное число, т. е. 3, – это a_2, откуда $b_2 = 3 + 2 = 5$. После этого наименьшим неиспользованным числом оказывается $a_3 = 4$, откуда $b_3 = 4 + 3 = 7$. Так можно действовать бесконечно, *каждый раз выбирая наименьшее неиспользованное натуральное число и именно его полагая равным a_n, а затем вычисляя $b_n = a_n + n$.* (Советую выписать через запятую первые 50 натуральных чисел и применить этот алгоритм – сразу увидите, насколько все просто!)

Не получится ли так, что очередное вычисленное значение a_n или b_n окажется уже занято каким-то ранее определенным a_m или b_m, где $m < n$? Нет, не получится: a_n, как сказано выше, есть наименьшее натуральное число, отличное от $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ и от $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$, и потому a_n не может совпадать ни с одним из них; число $b_n = a_n + n > a_{n-1} + n - 1 = b_{n-1}$ тоже не может ни с чем совпасть.

Упражнение 1. Найдите a_{31}.

Гипотеза Акулича и явные формулы

Проделав при помощи «Пентиума» вычисления для первых нескольких миллионов натуральных чисел, Акулич пришел к красивой и смелой гипотезе: *отношение количества a-чисел к количеству b-чисел стремится к «золотому сечению»* $(1+\sqrt{5})/2$.

Эта гипотеза верна. Более того,

$$a_n = \left[\left(1+\sqrt{5}\right)n/2\right],$$
$$b_n = a_n + n = \left[\left(1+\sqrt{5}\right)n/2\right] + n = \left[\left(3+\sqrt{5}\right)n/2\right], \qquad (1)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть, т. е. $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Прежде чем доказывать эти явные формулы, давайте выведем из них гипотезу Акулича. Обозначим для краткости $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и $\beta = \left(3+\sqrt{5}\right)/2$. Рассмотрим произвольное натуральное число N и выясним, сколько a-чисел и сколько b-чисел среди первых N натуральных чисел, если последовательности заданы формулами $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = [\beta n]$.

Неравенство $a_n \le N$ равносильно, по определению целой части, неравенству $\alpha n < N + 1$, т. е. неравенству $n < (N+1)/\alpha$. Значит, a-чисел среди первых N натуральных чисел имеется ровно $\left[(N+1)/\alpha\right]$. Аналогично, b-чисел $\left[(N+1)/\beta\right]$.

Итак, отношение количества a-чисел к количеству b-чисел есть $\left[(N+1)/\alpha\right]/\left[(N+1)/\beta\right]$. Устремим N к бесконечности: отбрасывая знак целой части, в пределе получаем отношение

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Гипотеза доказана; точнее, она выведена из формул (1).

Упражнение 2. При помощи калькулятора убедитесь, что следующая таблица заполнена правильно:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\left[\left(1+\sqrt{5}\right)n/2\right]$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
$\left[\left(3+\sqrt{5}\right)n/2\right]$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47

Доказательство

Как же доказать замечательные формулы (1)? И неужели я первый догадался рассмотреть выражения $[\alpha\beta]$ и $[\beta n]$? Нет, в 1877 году в «Теории звука» лорд Рэлей писал: «Если x есть некоторое положительное иррациональное число, меньшее единицы, то можно взять два ряда величин n/x и $n/(1-x)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$; каждое число, принадлежащее к тому или иному ряду, и только оно одно, будет заключено между двумя последовательными натуральными числами». Другими словами, последовательности $a_n = [n/x]$ и $b_n = [n/(1-x)]$ заполняют без пропусков и перекрытий весь натуральный ряд, если $0 < x < 1$ и $x \notin \boldsymbol{Q}$.

Интересующие нас явные формулы получаются из формул Рэлея при $x = 2\big/\left(1+\sqrt{5}\right)$, поскольку при этом величина $1 - x$ равна как раз $2\big/\left(3+\sqrt{5}\right)$ (проверьте!).

В общем случае, обозначив $\alpha = 1/x$ и $\beta = 1/(1-x)$, можно переформулировать утверждение Рэлея следующим образом [1]:

Теорема 1. *Если α и β – положительные иррациональные числа, связанные соотношением $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, то среди чисел вида $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, где $n \in \boldsymbol{N}$, каждое натуральное число встречается ровно один раз.*

Доказательство. Поскольку $\alpha > 1$, в последовательности $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, … никакое число не повторяется. Аналогично, вследствие неравенства $\beta > 1$, строго возрастает и последовательность $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, …

Дальше доказательство ведем методом «от противного». Предположим сначала, что некоторое натуральное число k вошло в обе последовательности, т. е. $k = [\alpha m] = [\beta n]$, где m, n – натуральные числа. Тогда должны быть выполнены неравенства

$$k < \alpha m < k+1, \qquad k < \beta n < k+1,$$

т.е.

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k}, \qquad \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{k}.$$

Сложим эти неравенства, не забыв использовать условие $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Получим

$$\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k},$$

откуда

$$k < m + n < k + 1.$$

Но такого для натуральных чисел не бывает! Значит, число k не могло войти в обе рассматриваемые последовательности.

Теперь предположим, что натуральное число k не вошло ни в одну из последовательностей. Тогда для некоторых натуральных чисел m и n должны быть выполнены неравенства

$$\alpha m < k < k+1 < \alpha(m+1),$$

$$\beta n < k < k+1 < \beta(n+1),$$

которые мы преобразуем к виду

$$\frac{m}{k} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{k+1}, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{k+1}.$$

Складывая, получаем

$$\frac{m+n}{k} < 1 < \frac{m+n+2}{k+1},$$

откуда $m + n < k$ и $k + 1 < m + n + 2$, что невозможно для натуральных чисел. Получили желанное противоречие. Теорема доказана.

Хотя мне нравится это доказательство, есть и более короткий способ.[2] Левее любого натурального числа N лежат $[N/\alpha]$ членов первой последовательности и $[N/\beta]$ членов второй. Поскольку α иррационально, числа N/α и N/β имеют ненулевые дробные части. Далее, сумма

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$$

является целым числом, так что дробные части слагаемых дополняют друг друга, т.е. в сумме дают в точности 1. Значит, сумма целых частей $[N/\alpha] + [N/\beta]$ равна $N - 1$, т.е. левее числа N лежит в точности $N - 1$ членов этих последовательностей. Как легко понять, просматривая натуральный ряд слева направо (любитель строгости сказал бы: применяя индукцию), это как раз означает, что рассматриваемые последовательности однократно покрывают натуральный ряд.

Упражнения

3. Докажите, что последовательности, заданные формулами $a_n = \left[n\sqrt{2}\right]$ и $b_n = a_n + 2n$, заполняют весь натуральный ряд без пропусков и перекрытий.

4. Найдите явные формулы для возрастающих последовательностей a_n и b_n, заполняющих натуральный ряд без пропусков и перекрытий и удовлетворяющих соотношению $b_n = a_n + 3n$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. Докажите утверждение, обратное теореме 1: если α, β – положительные числа и если последовательности $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = [\beta n]$ покрывают натуральный ряд без пропусков и перекрытий, то $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, причем числа α и β иррациональны.

6. Выведите из трех предыдущих упражнений, что числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{13}$ иррациональны.[3]

7. Пусть a – положительное иррациональное число, $b = 1/a$. Докажите, что между любыми двумя последовательными натуральными числами содержится одно и только одно из чисел $1 + a$, $2(1 + a)$, $3(1 + a)$, … и $(1 + b)$, $2(1 + b)$, $3(1 + b)$, …

Замечание. Последнее упражнение имеет номер 38 в книге «Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» (М., Мир, 1977). Следующее упражнение – задача 294 из той же книги.

8. Для натурального числа $a > 4$ рассмотрим две последовательности $f(n)$ и $g(n)$ натуральных чисел, заданные условиями $f(1) =$

[1] *С этого момента, заметьте, числа α и β не обязательно суть $\left(1+\sqrt{5}\right)\big/2$ и $\left(3+\sqrt{5}\right)\big/2$.*

[2] *Мне кажется, его чуть сложнее понять или придумать. Впрочем, не будем спорить о вкусах.*

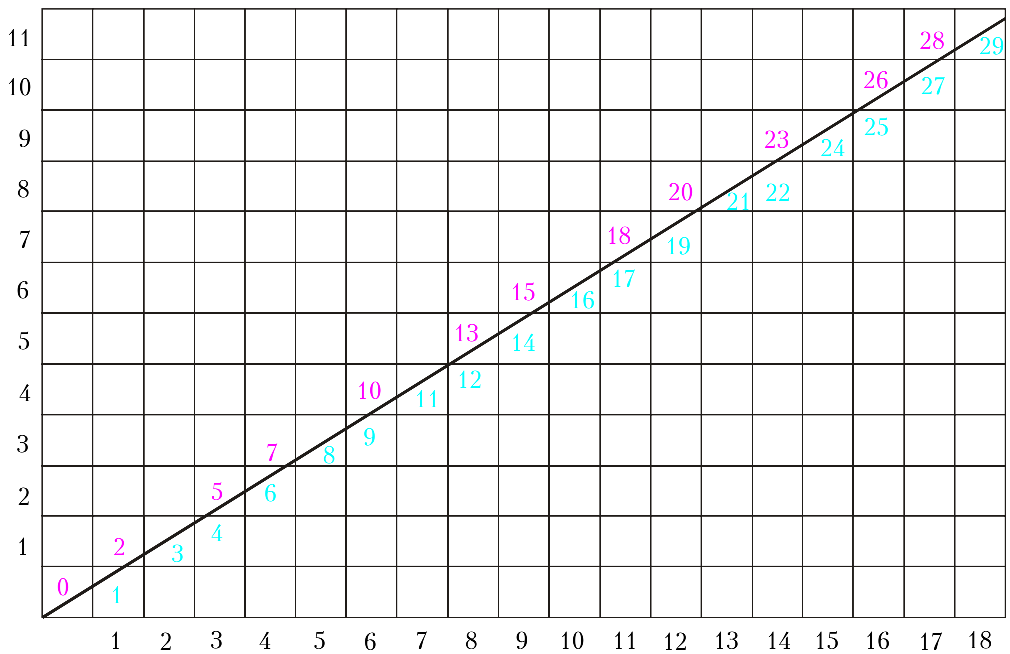
[3] *Только не подумайте, пожалуйста, что я хочу заменить этим способом привычное доказательство из школьного учебника. Нет, это всего лишь шутка. Шутка!*

$= 1$, $g(n) = na - 1 - f(n)$ и, наконец, $f(n+1)$ – наименьшее натуральное число, отличное от каждого из $2n$ чисел $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$, $g(1)$, $g(2)$, …, $g(n)$. Докажите, что существуют такие числа α и β, что $f(n) = [\alpha n]$, $g(n) = [\beta n]$.

9. а). Пусть $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Докажите для любого натурального числа n равенство $[n\alpha^2] = [\alpha[\alpha n]] + 1$.

б) Пусть последовательность всех натуральных чисел разбита на две непересекающиеся подпоследовательности $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$ и $g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$, причем $g(n) = f(f(n)) + 1$ для любого n. Найдите $f(240)$. (Этот пункт в 1978 году предлагался на Международной математической олимпиаде и вошел в «Задачник «Кванта» под номером М538.)

10. Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 1$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число входит в одну и только одну из последовательностей $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = \lceil \beta n \rceil - 1$, где через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, которое больше или равно числу x (иначе говоря, $\lceil x \rceil = -[-x]$).



Геометрическая интерпретация

Что для нас – головоломка,
духом тайны разум будит –
очевидно, для потомка
просто школьным курсом будет.

И.Губерман

Теорема 1 настолько красива, что возникает желание глубже проникнуть в суть дела. Пусть, как и ранее, α и β – положительные иррациональные числа, причем $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Тогда $\beta + \alpha = \alpha\beta$, откуда $(\alpha-1)(\beta-1) = 1$.

Нарисуем на клетчатой бумаге (см. рисунок) как на координатной плоскости прямую l, заданную уравнением $y = (\alpha-1)x$, которое можно записать также в виде $x = (\beta-1)y$. Занумеруем подряд все клетки, которые пересекает l, начиная с нулевой клетки, которой принадлежит начало координат (на рисунке взято $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$). Поскольку число α иррационально, прямая l не проходит через узлы сетки (кроме, разумеется, начала координат). Значит, l входит в очередную клетку либо слева, пересекая вертикальную линию сетки, либо снизу, пересекая горизонтальную линию.

Если l вошла в клетку слева и пересекла при этом вертикаль $x = n$, то номер клетки, в которую при этом вошла прямая, равен $n + \left[(\alpha-1)n\right] = [\alpha n]$. (Это не очевидно? Согласен. Но если занумеровать не только клетки, которые пересекает l, а вообще присвоить номер $n + m$ каждой клетке, заданной неравенствами $n \le x < n+1$, $m \le y < m+1$, то ситуация вполне прояснится.) Если же прямая l снизу пересекла горизонталь $y = m$, то номер соответствующей клетки равен $\left[(\beta-1)m\right] + m = [\beta m]$.

Вот и все. Согласитесь, это геометрическое доказательство теоремы 1 достойно восхищения! И хотя можно было бы еще очень многое рассказать (последовательности $a_n = \left[n\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]$, $b_n = \left[n\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$ связаны и с игрой цзяньшицзы, и с числами Фибоначчи, и со многими другими интересными задачами), я ограничусь советом прочитать статью И.М.Яглома «Две игры со спичками» («Квант» №1 за 1992 год) и статью А.Ю.Матулиса, А.Ю.Савушкинаса «Ферзя – в угол, «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи» («Квант» №7 за 1984 год).

(Окончание следует)