$2B$, равна $2x$. Пусть теперь дробные части чисел A и B лежат в одном интервале; рассмотрим пары $2A$ и $2B$, $4A$ и $4B$ и т.д. Из сказанного выше следует, что на некотором шаге одна из дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{2}{3}$. Значит, эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности.

Применяя эти рассуждения к числам $A = 2^{n_0} \cdot \lg 2$ и $B = 2^{n_0+k} \cdot \lg 2$, где n_0 – некоторое фиксированное натуральное число, получаем противоречие с предположением о периодичности.

Избранные задачи Московской физической олимпиады 1999 года

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Пусть после того, как на поршень массой M_1 положили груз массой m, этот поршень опустился на Δh_1, а второй поршень поднялся на Δh_2 относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен $\Delta h_1 + \Delta h_2$, а разность давлений, создаваемая этим перепадом, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создает груз массой m, лежащий на первом поршне:

$$\rho g(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{mg}{S_1},$$

где S_1 – площадь первого поршня. Так как объем жидкости под поршнями не изменился, справедливо соотношение

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2,$$

где S_2 – площадь второго поршня. Из этих уравнений получаем

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)} = h.$$

Пусть теперь груз положили на поршень массой M_2. Проводя аналогичные рассуждения, можно честно найти высоту, на которую при этом поднимется поршень массой M_1. Однако, зная выражение для Δh_2, ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе все равно, какой поршень считать «первым», а какой – «вторым». Значит, для того чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, т.е. заменить все индексы «1» на индексы «2» и наоборот. В итоге получим

$$\Delta h_1' = \frac{m}{\rho(S_2 + S_1)} = \Delta h_2 = h,$$

т.е. поршень массой M_1 поднимется относительно начального положения на ту же самую высоту h.

2. Прежде всего нужно придумать модель, которую можно применить для описания процесса охлаждения кофе при помощи мороженого. Предположим, что мороженое по своим свойствам близко ко льду и что для охлаждения кофе до требуемой температуры в него нужно будет положить мороженое ложечкой несколько раз. Будем считать, что при соприкосновении с мороженым ложечка охлаждается до температуры брикета, а при опускании в кофе – нагревается до температуры напитка. Теперь можно пытаться решить задачу «в лоб», определяя температуру кофе после погружения в него каждой очередной порции. Однако в задаче не спрашивается, сколько ложек мороженого нужно положить в кофе, а требуется лишь оценить необходимую массу мороженого. Поэтому сначала решим задачу в первом приближении.

Запишем уравнение теплового баланса для системы, состоящей из чашки, ложки, кофе и мороженого. Энергия, выделяющаяся при охлаждении кофе от температуры T_1 до температуры T_3, идет на нагрев фарфоровой чашки от комнатной температуры $T_к$ до температуры T_3, на нагрев мороженого от температуры T_2 до температуры $T_0 = 0$ °C, на его плавление и дальнейший нагрев от температуры T_0 до температуры T_3, а также на нагрев серебряной ложки. Ложка, в соответствии со сказанным, может помещаться в мороженое и в кофе по нескольку раз. Это означает, что нагрев ложки каждый раз происходит на разное количество градусов, потому что мороженое понемногу нагревается от горячей ложки, а кофе понемногу остывает при погружении в него ложки. Чтобы не рассматривать весь процесс детально (ведь мы ищем оценку), предположим, что ложка погружается в мороженое один раз и нагревается на некоторую среднюю разность температур кофе и мороженого $\Delta T_{ср} \approx 80$ °C. Учитывая все это, получаем оценку для массы мороженого:

$$m_2 \approx 47 \text{ г}.$$

Легко показать, что ложечка слабо влияет на процесс охлаждения кофе, так как для ее нагрева нужно затратить очень небольшое количество энергии. Понятно также, что оценка средней разности температур $\Delta T_{ср}$ и числа порций мороженого практически не влияет на ответ.

9 класс

1. $M = m\left(\frac{L^2}{2aH} - 1\right) = 4{,}7$ кг.

2. Пусть в некоторый момент времени шарик имел радиус R и площадь поверхности S, а за маленький промежуток времени Δt радиус шарика (вследствие коррозии) уменьшился на ΔR. Тогда объем растворенного за это время алюминия будет равен $S\Delta R$, а его масса – $\rho S \Delta R$. С другой стороны, масса растворенного за время Δt алюминия равна $\alpha S \Delta t$, где $\alpha = 10^{-4}$ г/(см^2·ч) – масса металла, растворяющегося за один час с одного квадратного сантиметра поверхности. Приравняем полученные выражения:

$$\rho S \Delta R = \alpha S \Delta t$$

и найдем скорость уменьшения радиуса шарика:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Мы видим, что радиус шарика уменьшается с постоянной скоростью. Ясно, что шарик растворится полностью тогда, когда изменение его радиуса станет равно половине начального диаметра. Тогда из последней формулы получаем

$$t = \frac{\rho d}{2\alpha} = 13500 \text{ ч} = 562{,}5 \text{ сут} \ (\approx 18{,}5 \text{ месяцев}).$$

10 класс

1. Для упрощения рассмотрим два двигателя, находящихся по разные стороны от оси корабля, вокруг которой происходит вращение (ясно, что наличие двух остальных симметрично расположенных двигателей не повлияет на результат). Понятно, что маневр должен совершаться следующим образом: сначала двигатели разгоняют вращение корабля вокруг оси, а когда он повернется на 90°, они должны начинать тормозить корабль так, чтобы он, повернувшись еще на 90°, остановился. Так как двигатели развивают постоянную силу тяги, времена разгона и торможения одинаковы. Таким образом, чтобы решить задачу, нам достаточно найти время разворота на 90°.

При развороте двигатели перемещаются по дугам окружности. Так как силы, возникающие при работе двигателей, направлены по касательной к этой окружности, тангенциальное ускорение каждого двигателя равно $a_\tau = F/m$, где F – сила тяги, m – масса. При повороте на 90° двигатель проходит путь s, равный четверти длины дуги окружности. Из кинематики имеем $s = \pi r/2 = a_\tau t^2/2$, где r – радиус дуги окружности. Подставляя в эту формулу выражение для a_τ, найдем