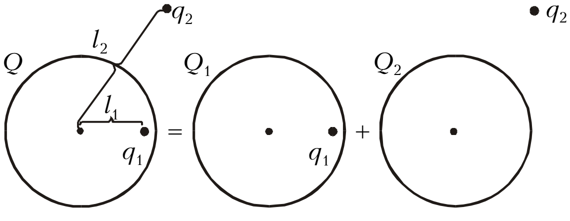



*Рис. 7*

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд $q_1$ на расстоянии $l_1$ от сферы с зарядом $Q_1$, а затем – заряд $q_2$ на расстоянии $l_2$ от сферы с зарядом $Q_2$, при этом $Q_1 + Q_2 = Q$ (рис.7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), а во втором случае – формулой (6). А теперь наложим первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен $Q$. Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R}.$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная *эквивалентность* точечных зарядов и заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния $l$ между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом $l$. Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

**Задача 6.** *Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$). Между сферами на расстоянии $r$ от центра находится точечный заряд $q$. Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?*

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

где $q_1$ и $q_2$ – заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда $q_1 + q + q_2$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q\frac{\frac{R_2}{r} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q\frac{1 - \frac{R_1}{r}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

**Упражнения**

**1.** Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$). Внутренняя сфера заряжена зарядом $q$, внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

**2.** Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами $R_1$, $R$ и $R_2$ ($R_1 < R < R_2$). Среднюю сферу заряжают зарядом $q$, а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

**3.** На расстоянии $l$ от центра заземленной проводящей сферы радиусом $R$ помещают точечный заряд $q$. Какой заряд появится на сфере?

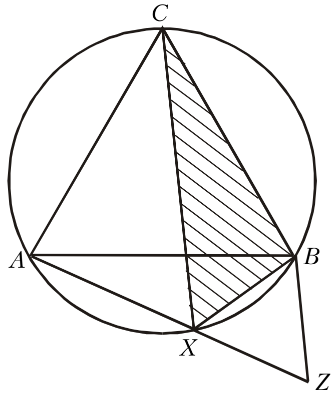
**4.** Проводящую сферу радиусом $R$ заземляют, а на расстояниях $l_1 < R$ и $l_2 > R$ от ее центра помещают точечные заряды $q_1$ и $q_2$. Какой заряд появится на сфере?

**5.** Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами $R$ и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от их центра находится точечный заряд $q$. Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?

# НАМ ПИШУТ

## Еще два доказательства свойства правильного треугольника

В первом номере за 1999 год в статье «Вписанные многоугольники» тремя способами доказано, что если на дуге $AB$ описанной окружности равностороннего треугольника $ABC$ взята точка $X$, то $AX + BX = CX$ (см. рисунок).




Между тем есть еще два замечательных доказательства. Во-первых, мы можем построить на отрезке $XB$ вовне правильный треугольник $XZB$. При повороте вокруг точки $B$ на 60° точка $C$ переходит в $A$, $X$ – в $Z$, треугольник $CXB$ – в треугольник $AZB$. Значит, $CX = AZ$. Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника $AXBC$ равна 180°, имеем $\angle AXB = 120°$, так что точки $A$, $X$, $Z$ лежат на одной прямой. Следовательно,

$$AX + BX = AX + XZ = AZ = CX.$$

Во-вторых, можно бесхитростно применить теорему косинусов: обозначив $AB = BC = CA = l$, $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$, находим из $\Delta AXC$ и $\Delta CXB$:

$$l^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°,$$
$$l^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°.$$

Вычитая почленно, получаем $a^2 - b^2 - ac + bc = 0$, откуда

$$(a - b)(a + b - c) = 0.$$

Осталось разделить на $a - b$. (Случай $a = b$ легко разобрать отдельно.)

*М.Панк*