применять формулу (2) или найти потенциал центра – аналогично задаче 1). Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi'(3R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q'}{3R}+\frac{q}{3R}+\frac{q'}{3R}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{3R}.$$

Приравнивая потенциалы, находим

$$q'=\frac{q}{4}.$$

Именно такой заряд и пройдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия системы равна просто энергии средней сферы, т.е.

$$W=\frac{1}{2}q\varphi(2R)=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W'=-\frac{1}{2}q'\varphi'(R)+\frac{1}{2}q\varphi'(2R)+$$
$$+\frac{1}{2}q'\varphi'(3R)=\frac{1}{2}q\varphi'(2R)$$

(мы учли, что потенциалы внешней и внутренней сфер равны друг другу). Для конечного потенциала средней сферы запишем

$$\varphi'(2R)=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q'}{2R}+\frac{q}{2R}+\frac{q'}{3R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{11q}{24R}$$

(для вклада внутренней сферы применяем формулу (1), а для вклада внешней – формулу (2)). Окончательно, выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q=W-W'=$$
$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2R}-\frac{11q^2}{24R}\right)=\frac{1}{192\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}.$$

В следующей задаче выясним, как изменяется потенциал проводящей сферы в присутствии точечного заряда.

Задача 5. *Проводящая сфера радиусом R заряжена зарядом Q. Каким станет потенциал сферы, если на расстоянии l от ее центра поместить точечный заряд q? Разобрать случаи $l>R$ и $l<R$.*

На первый взгляд, эта задача гораздо труднее предыдущей, поскольку присутствие точечного заряда нарушает сферическую симметрию, и распределение заряда по поверхности сферы становится неравномерным. Действительно, получить полное описание, т.е. найти распределение зарядов на сфере и поле вокруг нее, совсем не просто, хотя и возможно. Это можно сделать, например, с помощью метода электростатических изображений, неоднократно описанного на страницах «Кванта» (последний раз – в №1 за 1996 г.). Однако ответить на поставленный в задаче вопрос можно довольно просто, опираясь на симметрию сферы и теорему единственности.

Начнем со случая $l>R$ (рис. 5). В этом случае потенциалы всех точек сферы одинаковые, и достаточно найти потенциал какой-нибудь одной точки. Ясно, что мы выберем центр сферы. Вклад зарядов, распределенных по поверхности сферы, вычисляется так же, как в задаче 1 (см. формулу (3)), и составляет $\sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i}{R}=$ $=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum\Delta Q_i}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ (поскольку в этом вычислении никак не используется равномерность распределения заряда – ответ зависит только от полного заряда сферы). Остается учесть вклад точечного заряда и записать

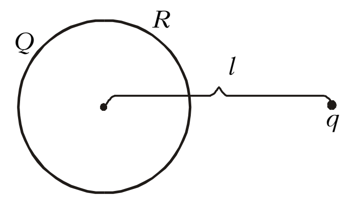

Рис. 5

$$\varphi(R)=\varphi(0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}. \quad (6)$$

Видно, что потенциал сферы при помещении рядом с ней точечного заряда изменился на величину потенциала, создаваемого этим зарядом в центре сферы. Во избежание недоразумений отметим, что существует *единственное* распределение зарядов по поверхности сферы, при котором потенциал *всех внутренних точек* сферы равен полученному значению.

Перейдем к случаю $l<R$ (рис. 6). Так как теперь заряд находится внутри сферы, напряженность поля внутри сферы не равна нулю и потенциалы различных точек не равны друг другу. Однако и в этом случае несложно определить потенциал сферы, только надо обратить внимание не на внутреннюю часть сферы, а на окружающее ее внешнее пространство. Оказывается, поле во внешнем пространстве не зависит от положения заряда q внутри сферы, т.е. при перемещении заряда по внутренней области поле во внешней области не меняется.

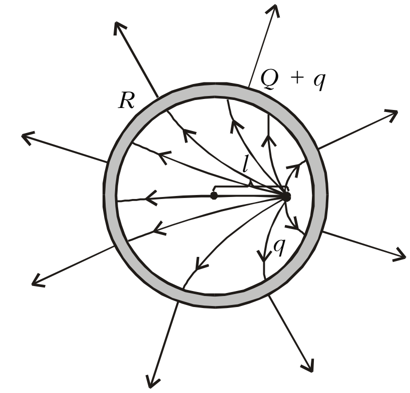

Рис. 6

Это утверждение верно для полого проводника любой формы, и следует оно из теоремы единственности. Поле во внешнем пустом пространстве однозначно определяется следующими условиями: 1) потенциал на бесконечности равен нулю; 2) потенциал на поверхности проводника принимает некоторое постоянное значение; 3) полный заряд внутри этой поверхности известен, т.е. известно полное число силовых линий, начинающихся на поверхности проводника. Существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям.

Для сферического проводника поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда $Q+q$. При этом заряд на сфере распределится следующим образом: на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд $-q$, поскольку здесь заканчиваются все силовые линии, начинающиеся на заряде q, а на внешней поверхности сферы равномерно распределится заряд $Q+q$. Следовательно, потенциал сферы в этом случае равен

$$\varphi(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \quad (7)$$

и не зависит от расстояния l.

А теперь попробуем ответить на такой вопрос: *чему будет равен потенциал проводящей сферы, несущей заряд Q, в присутствии двух точечных зарядов q_1 и q_2, расположенных на расстояниях l_1 и l_2 от центра сферы ($l_1<R<l_2$)*? Может показаться, что здесь нельзя применить ни одно из рассуждений, использованных в случае только одного заряда. Действительно, для первой части задачи было важно, что напряженность поля внутри сферы равна нулю, а для второй – что вне сферы нет зарядов. Но теорема единственности позволяет ответить на поставленный вопрос с помощью суперпозиции рассмотренных выше двух случаев расположения заряда относительно сферы.