следующим образом:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\frac{v_0}{2}.$$

Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости $\vec{u}$ и $\vec{v}$ направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, находим искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\right).$$

Задача о кнуте. Пусть вначале, двигая кнутовище со скоростью v_0 влево, такую же скорость сообщают всему кнуту по всей длине L, а потом, резко сдвинув кнутовище вправо, удерживают его неподвижно, прикладывая некоторую силу. Тогда длина l движущейся части кнута будет уменьшаться, а скорость v – увеличиваться. При каком значении l скорость v достигнет величины скорости звука $v_{зв}$ (рис.3)?

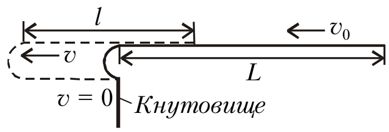

Рис. 3

Сначала для упрощения рассмотрим однородный кнут с массой M и длиной L, т.е. с линейной плотностью $\rho = M/L$. Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

или

$$v = v_0\sqrt{\frac{L}{l}}.$$

(Между прочим, отсюда видно, что при уменьшении l до нуля скорость v неограниченно растет.) Таким образом, получаем связь

$$v = -\frac{dl}{dt} = \frac{v_0 L^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Знак «минус» обусловлен уменьшением длины с течением времени. Запишем связь иначе:

$$l^{1/2}dl = -v_0 L^{1/2}dt$$

и проинтегрируем левую и правую части по интервалу времени t, за который длина движущейся части кнута меняется от L до l:

$$\int_L^l l^{1/2}dl = \left.\frac{l^{3/2}}{3/2}\right|_{l=L}^{l=l} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(l^{3/2} - L^{3/2}\right) = -v_0 L^{1/2} t.$$

Отсюда получаем

$$l = L\left(1 - \frac{3}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{2/3},$$

или, с учетом соотношения $v = v_0 L^{1/2}/l^{1/2}$, –

$$v = v_0\left(1 - \frac{3}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{-1/3}.$$

Формально при $t = 2L/(3v_0)$ скорость v стремится к бесконечности, а длина l – к нулю. Однако это получается при бесконечно тонком однородном кнуте, что нереалистично.

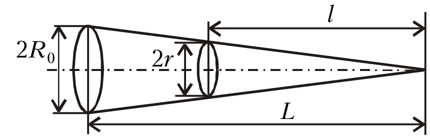

Рис. 4

Рассмотрим теперь более реальный вариант: кнут с линейно уменьшающимся, от кнутовища к концу, радиусом кругового сечения. Из подобия треугольников на рисунке 4 следует $r = R_0 l/L$. Повторяя предыдущую схему рассуждений, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \rho\frac{\pi R_0^2 L}{3}\frac{v_0^2}{2} = \rho\frac{\pi r^2 l}{3}\frac{v^2}{2},$$

откуда, с учетом связи $r = R_0 l/L$, получаем

$$v = v_0\left(\frac{L}{l}\right)^{3/2}.$$

Тогда

$$l = L\left(1 - \frac{5}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{2/5}, v = \frac{v_0}{\left(1 - \frac{5}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{3/5}}.$$

Оценим, при какой длине l скорость v достигает значения скорости звука $v_{зв} \approx 330$ м/с. Положив $L = 5$ м, $v_0 = 1$ м/с, получим

$$l = \frac{L}{\left(v_{зв}/v_0\right)^{2/3}} \approx \frac{5\text{ м}}{(330)^{2/3}} \approx \frac{5\text{ м}}{50} = 0{,}1\text{ м}.$$

Таким образом, при длине порядка 10 см от конца кнута происходит щелчок – переход звукового барьера.

Несколько задач для 11-классников

(Начало см. на с. 29)

y которых удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = 2\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2}.$$

в) Вычислите бесконечную сумму

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} + \ldots$$

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину 1, а два оставшихся равны друг другу.

б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину 1.

в) Сколько различных (т.е. различимых по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?

Разные задачи

1. а) Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$.

б) Найдите все натуральные решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}$.

2. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

в) Найдите все четырехугольники, длины сторон и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.