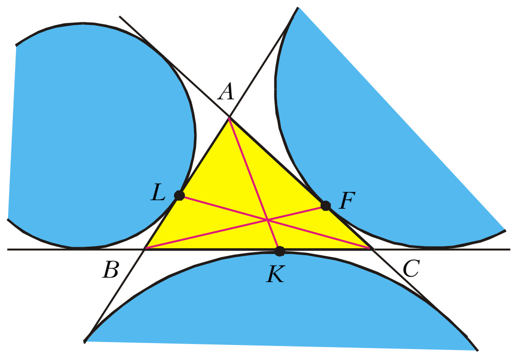

Рис. 3

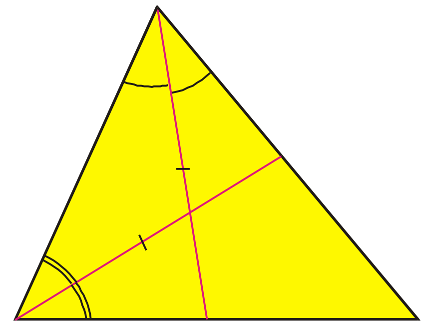

Рис. 4

Любопытно, что отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, делятся пополам окружностью, описанной вокруг этого треугольника (рис.2).

Если провести окружность через основания высот данного треугольника, то она будет проходить через середины сторон этого треугольника и через середины отрезков высот треугольника от точки их пересечения до вершин. Такая окружность называется окружностью девяти точек. Окружность девяти точек касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника.

Прямые в треугольнике, соединяющие его вершины с точками касания вневписанных окружностей (рис.3), пересекаются в одной точке, которая называется точкой Нагеля в честь открывшего ее немецкого математика Августа Нагеля (1821—1903).

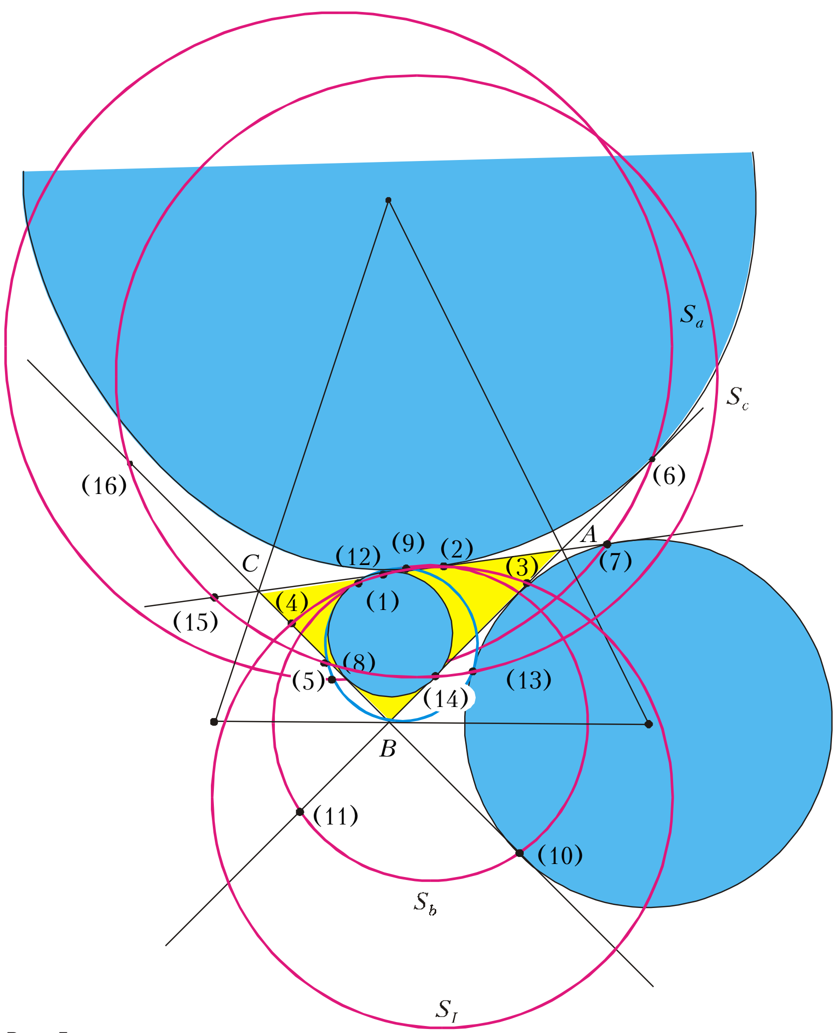

Рис. 5

Легко доказать, что у равнобедренного треугольника равны медианы, высоты и биссектрисы, выходящие из концов основания. Ненамного труднее доказать, что если две высоты или две медианы треугольника равны, то треугольник – равнобедренный (рис.4). Верно такое утверждение и для биссектрис, но его доказательство довольно сложно. Само это утверждение носит название «теорема Штрейнера—Лемуса».

На рисунке 5 построены все вневписанные окружности треугольника ABC. 16 точек касания вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью девяти точек, не совпадающие с вписанной и вневписанными окружностями этого треугольника, лежат на четырех окружностях S_I, S_a, S_b, S_c. На окружности S_I лежат точки касания (1), (2), (3), (4); на окружности S_a – (5), (6), (7), (8); на окружности S_b – (9), (10), (11), (12) и, наконец, на окружности S_c – (13), (14), (15), (16). Окружности S_I, S_a, S_b, S_c называются окружностями четырех точек треугольника ABC.