$> PN \geq PH$ ($N = PH_1 \cap CD$). Кроме того, $CD < KL$, поэтому $S_{KPL} = \frac{1}{2} PH_1 \cdot KL > \frac{1}{2} PH \cdot CD = S_{CPD}$. Но, согласно а), $S_{KPL} = S_{APB}$, т.е. $S_{APD} > S_{CPD}$ – противоречие, значит, $PA = PB = PC = PD$, что и требовалось доказать.

И.Анно

М1671. *На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b – нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Назовем *тройкой* двух судей и одного участника, если оценки, выставленные ему этими судьями, совпадают. Пусть l – количество различных троек. Оценим l. С одной стороны, по условию, для любых двух судей существует не более k троек, включающие этих судей, поэтому

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq l \qquad (1)$$

($\frac{b(b-1)}{2}$ – количество неупорядоченных пар судей).

С другой стороны, если b_1 – количество судей, поставивших некоторому определенному участнику оценку «удовлетворительно», b_2 – «неудовлетворительно», то этот участник входит в состав $\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2}$ троек. Но $b = b_1 + b_2$ – нечетное число, поэтому $|b_1 - b_2| \leq 1$ и, значит,

$$\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2} = \frac{(b_1+b_2)^2}{4} + \frac{(b_1-b_2)^2}{4} - \frac{b_1+b_2}{2} \geq \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Суммируя эти неравенства по всем a участникам, получаем

$$l \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b},$$

что и требовалось доказать.

Д.Шаповалов

М1672. *Пусть d(n) – количество всевозможных натуральных делителей числа n, включая 1 и само n. Найдите все натуральные числа k такие, что* $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ *при каком-либо n.*

Ответ: в указанном виде представимы все нечетные числа и только они.

Докажем вначале, что k – нечетно. Действительно, если $n = 1$, то $d(n) = d(n^2) = 1 \Rightarrow k = 1$. Если $n > 1$, то $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ (разложение n по степеням простых чисел), тогда $n^2 = p_1^{2r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{2r_s}$, поэтому $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$ – нечетно, так как числитель этой дроби $d(n^2) = (2r_1+1) \cdot \ldots \cdot (2r_s+1)$ – нечетное число.

Значит, $k = 2m+1$. Индукцией по m докажем, что для каждого нечетного k найдется n такое, что $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$, т.е.

$$k = \frac{(2r_1+1) \cdot \ldots \cdot (2r_s+1)}{(r_1+1) \cdot \ldots \cdot (r_s+1)}. \qquad (*)$$

База индукции: $m = 1$. $2m+1 = 3 = \frac{(2 \cdot 4+1) \cdot (2 \cdot 2+1)}{(4+1) \cdot (2+1)}$.

Индукционный переход: пусть для всех $m < M$ каждое число $2m+1$ представимо в виде дроби (*). Докажем, что число $k = 2M+1$ также представимо.

Пусть $k+1 = 2^l \cdot t$, где t – нечетно, тогда $t = \frac{k+1}{2^l} \leq \frac{k+1}{2} < k$, так как $l \geq 1$ и $k > 1$. Рассмотрим числа $r_1, \ldots, r_l$ вида $r_1 = 2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0$, $r_2 = 2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1$, …, $r_l = 2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1}$, тогда для $n_1 = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{r_l}$

$$k_1 = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} =$$

$$= \frac{(2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1)}{(2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1} + 1)} =$$

$$= \frac{2^{2l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1}{2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1} = \frac{(2^l - 1)(2^l \cdot t - 1)}{(2^l - 1)t} = \frac{2^l \cdot t - 1}{t}.$$

По предположению индукции, так как $t < k$, найдется число $n_2 = q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s}$ такое, что t представимо в виде $t = \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)}$. Выбрав различные простые числа $p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_s$, мы получаем, что для $n = n_1 \cdot n_2$

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} \cdot \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)} = k_1 \cdot t = 2^l \cdot t - 1 = k.$$

Переход выполнен.

В.Дремов, Н.Дуров

М1673*. *Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис. 1). Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников – красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.*

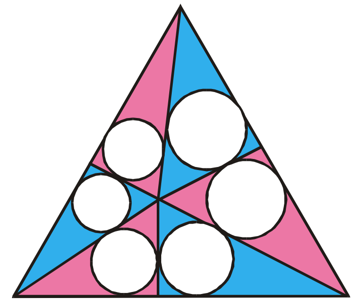

Рис. 1

Доказательство опирается на два вспомогательных утверждения.