ся на произвольную гладкую поверхность:

$$K(x) = \lim_{S\to 0}\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{S}. \qquad (4)$$

Здесь углы и площадь относятся к малому треугольнику на поверхности, ограниченному линиями кратчайших расстояний на ней, а кривизна, вообще говоря, меняется от точки к точке, является величиной локальной. И в общем случае, так же как и для сферы, K служит внутренней характеристикой поверхности, не зависящей от ее погружения в трехмерное пространство. Гауссова кривизна не меняется при изгибании поверхности без ее разрыва и растяжения. Так, например, конус или цилиндр можно разогнуть в плоскость, и поэтому для них, так же как для плоскости, $K = 0$.

На соотношения (3), (4) полезно взглянуть несколько иначе. Вернемся к рисунку 1. Возьмем на полюсе вектор, направленный вдоль одного из меридианов, и перенесем его вдоль этого меридиана, не меняя угла между ними (в данном случае нулевого), на экватор. Далее, перенесем его вдоль экватора, снова не меняя угла между ними (на сей раз $\pi/2$), на второй меридиан. И наконец, таким же образом вернемся вдоль второго меридиана на полюс. Легко видеть, что, в отличие от такого же переноса по замкнутому контуру на плоскости, вектор окажется в конечном счете повернутым относительно своего исходного направления на $\pi/2$, или на

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = KS. \qquad (5)$$

Этот результат, поворот вектора при его переносе вдоль замкнутого контура на угол, пропорциональный охваченной площади, естественным образом обобщается не только на произвольную двумерную поверхность, но и на многомерные неевклидовы пространства. Однако в общем случае n-мерного пространства кривизна не сводится к одной скалярной величине $K(x)$. Это более сложный геометрический объект, имеющий $n^2(n^2-1)/12$ компонентов. Его называют тензором кривизны, или тензором Римана, а сами эти пространства – римановыми. В четырехмерном римановом пространстве–времени общей теории относительности тензор кривизны имеет 20 компонентов.

Классические опыты по проверке ОТО

В начале предыдущего раздела уже отмечалось, что гравитационное поле влияет на движение не только массивных тел, но и света. В частности, фотон, распространяясь в поле Земли вверх, совершает работу против силы тяжести и поэтому теряет энергию. Как известно, энергия фотона пропорциональна его частоте, которая, естественно, тоже падает. Этот эффект – красное смещение – был предсказан Эйнштейном еще в 1907 году. Нетрудно оценить его величину. Работа против силы тяжести, очевидно, пропорциональна gh, где g – ускорение свободного падения, а h – высота подъема. Произведение gh имеет размерность квадрата скорости. Поэтому результат для относительного смещения частоты выглядит из соображений размерности так:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gh}{c^2}, \qquad (6)$$

где $c = 3\cdot 10^{10}$ см/с – скорость света. При $g \approx 10^3$ см/с^2, $h \sim 10^3$ см относительное смещение ничтожно мало́ $\sim 10^{-15}$. Неудивительно, что экспериментально красное смещение удалось наблюдать лишь спустя полвека, с появлением техники, использующей эффект Мёссбауэра. Это сделали Паунд и Ребка.

Еще один эффект, предсказанный Эйнштейном на заре ОТО, – отклонение луча света в поле Солнца. Его величину нетрудно оценить следующим образом. Если характерное, прицельное, расстояние луча от Солнца равно ρ, то радиальное ускорение составляет GM/ρ^2, где G – ньютоновская гравитационная постоянная, а M – масса Солнца. За характерное время пролета ρ/c радиальная компонента скорости фотона изменится на $GM/(\rho c)$ и угол отклонения составит соответственно

$$\theta \sim \frac{GM}{c^2\rho}.$$

Удобно ввести часто используемую в ОТО характеристику массивного тела, так называемый гравитационный радиус:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \qquad (7)$$

Наивное использование полуклассических соображений действительно приводит к ответу

$$\theta = \frac{r_g}{\rho}.$$

Именно этот результат был получен Эйнштейном в одном из первоначальных вариантов ОТО. Первая мировая война воспрепятствовала проверке, неблагоприятной для теории. Окончательный, правильный результат ОТО вдвое больше:

$$\theta = 2\frac{r_g}{\rho}. \qquad (8)$$

Гравитационный радиус Солнца $r_g \approx 3$ км, а прицельный параметр естественно сделать как можно ближе к обычному радиусу Солнца, который составляет $7\cdot 10^5$ км. Таким образом, для луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца, угол отклонения равен 1,75″. Измерения, проведенные группой Эддингтона во время солнечного затмения 1919 года, подтвердили последнее предсказание. Это был подлинный триумф молодой общей теории относительности.

И наконец, к числу классических тестов ОТО относится также вращение перигелия орбиты Меркурия. Замкнутые эллиптические орбиты – это специфика нерелятивистского движения в притягивающем потенциале $1/r$. Неудивительно, что в ОТО орбиты планет незамкнуты. Малый эффект такого рода удобно описывать как вращение перигелия эллиптической орбиты. Задолго до появления ОТО астрономы знали, что перигелий орбиты Меркурия поворачивается за столетие примерно на 6000″. Поворот этот в основном объяснялся гравитационными возмущениями движения Меркурия со стороны других планет Солнечной системы. Оставался, однако, неустранимый остаток – около 40″ в столетие. В 1915 году Эйнштейн объяснил это расхождение в рамках ОТО.

Из простых соображений размерности можно ожидать, что поворот перигелия за один оборот составляет

$$\delta \sim \frac{r_g}{R},$$

где R – радиус орбиты. Аккуратный расчет в рамках ОТО для орбиты, близкой к круговой, дает

$$\delta = \frac{3\pi r_g}{R}. \qquad (9)$$

При радиусе орбиты Меркурия