* * *

Сюжеты следующих задач о процентах почерпнуты из публикаций в различных периодических изданиях, а также из художественных книг. Оказывается, не один только Незнайка путается, когда речь заходит об этом простом математическом понятии.

1. «В начале одного из сезонов мне неожиданно сообщили, что я должен буду уплатить за снятые помещения почти в три раза дороже, чем прежде… На следующий день я получил письмо, извещавшее меня, что арендная плата будет увеличена только на пятьдесят, а не на триста процентов.» *(Дейл Карнеги, «Как завоевывать друзей и оказывать влияние на людей»)*

Не допустил ли автор математической ошибки?

2. «Сбор с физических лиц в Пенсионный фонд России временно увеличивается с 1 августа на 2 процента, до 3 процентов. …Сегодня… отчисляют физические лица 1 процент.» *(Сообщение ИТАР – ТАСС, опубликованное в газетах 24 июля 1998 г.)*

Все ли верно в этом тексте?

3. «Руководителей районных сельхозуправлений попросили ответить на такой вопрос: сколько сенажа выйдет из одного килограмма травы с влажностью 80%, если его влажность должна составлять 50%? Из двадцати руководителей верно ответили только четыре.» *(«Известия», 9 июля 1985 г.).*

А вы можете ответить? Желательно устно.

4. В повести Иосифа Герасимова «Ночные трамваи» приводится следующее якобы имевшее место обращение одного из руководителей страны к руководителю пищевой отрасли: «Мне наука сказала – масла надо полтора миллиона тонн. А сколько у тебя на блюде? Семьсот тридцать тысяч тонн!.. Ты масло какой жирности выпускаешь? Более восьмидесяти процентов? А Европа, между прочим, семьдесят три процента ест… Вот и думай!» Пищевик дал указание на заводы, рассказывает далее писатель, и добыча масла почти в полтора раза возросла.

Верны ли приведенные выше данные, если масло жирности ниже 61,5% (бутербродное) никогда не выпускалось?

5. В статье «Чем пахнет?» в сороковом номере журнала «Огонек» за 1997 год говорится, что некоторые умельцы из прогорклого импортного сливочного масла 82-процентной жирности «добавлением *энного количества* свежего молока» делают «масло» жирности 72,5%, получая лишние 100 кг на тонну.

Нет ли в этих данных ошибки?

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Как гора спутник родила» предназначена девяти- и десятиклассникам, заметка «Эта загадочная магнитная сила» – десяти- и одиннадцатиклассникам.

Как гора спутник родила

А.СТАСЕНКО

...и вот, произошло великое землетрясение, и солнце стало мрачно как власяница... и звезды пали на землю... и небо скрылось, свившись как свиток; и всякая гора и остров двинулись с мест своих...

Откровение св. Иоанна Богослова (6:12—14)

Вулканы – интереснейшие объекты природы, величественные и грозные. Вот, например: «Кракатау – действующий вулкан в Зондском проливе, между островами Явой и Суматрой. Высота 813 м. Известен исключительным по силе извержением в августе 1883. Взрыв уничтожил более половины вулканического острова… и был слышен на расстоянии более 3 тыс. км. Огромная морская волна, возникшая при взрыве, погубила на берегах Явы и Суматры более 36 тыс. чел. Объем продуктов извержения составил около 19 км^3. Выброшенный на высоту до 80 км вулканический пепел носился в воздухе несколько лет…»

Это — цитата из энциклопедии. А в одной Очень Научной Книге по космической газодинамике есть слова о возможности выброса вулканами астероидов: «Особый интерес с теоретической точки зрения представляет действие нормальных вулканических взрывов, результатом которых могут являться грандиозные катастрофические извержения типа Кракатау. Подобные взрывы не представляют собой какое-либо исключительное явление, а должны рассматриваться как закономерный результат физико-химических процессов, протекающих в недрах Земли… Высокие скорости газа при вулканических извержениях, несомненно превышающие несколько километров в секунду, объясняют большую высоту поднятия столба извержений, достигающую в ряде случаев 60 км… в некоторых случаях, когда начальная скорость выброса материала достигает 11 км/с, этот материал будет выброшен за пределы земного притяжения».

Ну, разве не заманчиво поподробнее рассмотреть процесс рождения земной

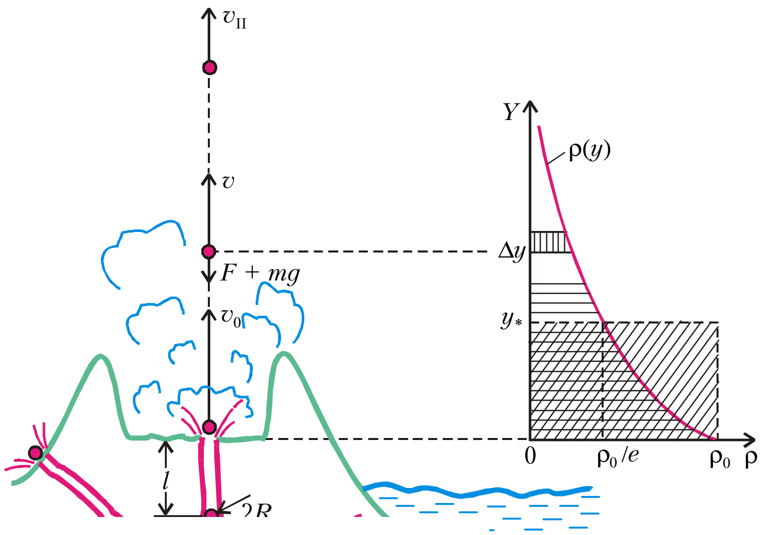

Рис. 1

горой спутника Земли или Солнца? К чему и приступим.

Предположим, что по вертикальному стволу вулкана движется случайно оторвавшаяся «пробка» базальта, лавы или чего-то еще (рис.1). Конечно же, ствол цилиндрический, а пробка шаровая. И оба имеют одинаковый радиус R. А ускоряется эта пробка под действием давления p вулканических газов, намного превышающего атмосферное (по оценкам упомянутой Очень Научной Книги, давление при вулканическом взрыве порядка ста тысяч атмосфер).

По выходе из жерла вулкана эта пробка приобретет наибольшую скорость v_0, после чего она начнет замедляться под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Кстати, мы здесь не собираемся говорить привычных слов: «сопротивлением воздуха пренебречь», потому что эта начальная скорость заведомо должна превосходить вторую космическую скорость

$$v_{II} = \sqrt{2gR_З} \approx 11 \text{ км/с} \qquad (1)$$

(здесь $R_З$ – радиус Земли) и, следовательно, пробка должна двигаться с большой сверхзвуковой скоростью. Действительно, приняв скорость звука по порядку величины равной $c = 300$ м/с, получим следующее значение отношения скоростей (его называют числом Маха[1]):

$$\frac{v_0}{c} \gtrsim \frac{v_{II}}{c} = \frac{11\cdot 10^3 \text{ м/с}}{3\cdot 10^2 \text{ м/с}} \sim 40 .$$

Это уже случай *гиперзвуковых* скоростей, и конструктору летательных аппаратов даже не придет в голову пренебречь сопротивлением воздуха.

Чему же равна эта сила сопротивления? Из соображений размерностей уже не раз получали ее зависимость от плотности воздуха ρ, площади поперечного сечения движущегося тела S и скорости его движения v (проверьте, что слева и справа стоят ньютоны):

$$F = C\rho S v^2 . \qquad (2)$$

А вот безразмерный коэффициент C не может быть определен при помощи размерностей – на то он и безразмерный. Но что удивительно – сам сэр Исаак Ньютон позаботился о нем: для таких гиперзвуковых движений его теоретические рассуждения дают значение $C = 1/2$.

Итак, что же происходит после «выстрела пробки» из вулкана? Ее потенциальная энергия по мере движения вверх вдоль оси Y увеличивается, а кинетическая энергия уменьшается. И мы сказали бы, что их сумма остается постоянной – применили закон сохранения механической энергии, – и получили бы формулу (1). Но это в том случае, если бы эта энергия не тратилась частично на преодоление силы сопротивления воздуха. Значит, здесь мы должны записать, что изменение (убыль) суммарной механической энергии равно работе силы сопротивления F на участке пути Δy:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + mgy\right) = -F\Delta y . \qquad (3)$$

Можно показать, что кинетическая энергия тела за пределами атмосферы (на высоте порядка, например, 100 км, характерной для спутников Земли) много больше потенциальной. Действительно, принимая $v = v_{II}$, $g = 10$ м/с^2, $y = 10^5$ м, получим, что $v^2/2$ превышает gy раз в двадцать (а если учесть, что начальная скорость v_0 должна превосходить v_{II}, чтобы «пробить» атмосферу, – то и больше). Таким образом, вторым слагаемым в скобках в уравнении (3) можно пренебречь в сравнении с первым с высокой точностью (ошибка — порядка нескольких процентов).

Сила сопротивления (см. выражение (2)) изменяется не только из-за изменения скорости, но также и вследствие падения плотности воздуха с высотой в соответствии с так называемой *барометрической формулой Больцмана*:

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_*} , \qquad (4)$$

где ρ_0 – значение плотности атмосферы на уровне моря (при $y = 0$), а y_* – характерная толщина атмосферы (порядка высоты Эвереста), на которой значение плотности в $e \approx 2{,}7$ раза меньше, чем ρ_0. Эта зависимость изображена на рисунке 1 справа (значения $\rho(y)$ показаны горизонтальными отрезками). Видно, что плотность атмосферы Земли очень быстро (физики говорят «экспоненциально») падает с высотой.

Зависимость (4) интересна тем, что если мы захотим приравнять массу вертикального столба атмосферы переменной плотности массе столба конечной высоты, но постоянной плотности ρ_0, то для этой высоты и получим значение y_*. Иначе говоря, площадь прямоугольника $\rho_0 y_*$, заштрихованного на рисунке косыми линиями, равна площади под кривой $\rho(y)$. Этот факт нам сейчас и пригодится.

С учетом всего сказанного, уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = -\frac{S}{m}\left(\rho_0 e^{-\frac{y}{y_*}} \Delta y\right). \qquad (5)$$

Математик скажет, что это похоже на обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными (слева – только v^2, справа – только y). А Новый Русский увидит здесь нечто от сложных банковских процентов (для кинетической энергии).

Теперь ничего не остается сделать, как решить уравнение (5). Конечно, студент первого курса Московского физико-технического института проделает эту операцию в уме. Но и школьник может тут сделать немало. Преж-

[1] *См., например, статью Г.Голицына «От капли до землетрясения» в предыдущем номере журнала. (Прим.ред.)*

де всего заметим, что справа в скобках стоит элементарная площадка, заштрихованная на рисунке 1 вертикальными линиями. Значит, по мере того как «вулканическая пробка» будет лететь вдоль оси Y вверх, эти элементарные площадки покроют всю площадь под кривой $\rho(y)$, равную $\rho_0 y_*$, как было упомянуто ранее. И где-то недалеко от поверхности Земли (атмосфера тонкая!) сила сопротивления перестанет влиять на энергию поднимающегося тела. Именно здесь телу и нужно достичь второй космической скорости, чтобы в дальнейшем выйти за пределы притяжения Земли.

А что при этом творится в левой части уравнения (5)? Здесь после интегрирования по y (прохождения толщи атмосферы) получится натуральный логарифм от v^2, так что будем иметь

$$\ln \frac{v_{\mathrm{II}}^2}{v_0^2} = -\rho_0 y_* \frac{S}{m}. \qquad (6)$$

С другой стороны, начальная скорость вылета «пробки» из вулкана достигается за счет силы давления pS, действующей на массу m. Если считать давление постоянным и пренебречь трением о стенки канала, эта сила обеспечивает постоянное ускорение $a = pS/m$. Следовательно, по законам равноускоренного движения на длине канала l разгоняемое тело приобретет удельную кинетическую энергию (энергию единичной массы)

$$\frac{v_0^2}{2} = al = \frac{pS}{m} l.$$

Подставив это выражение в уравнение (6) и сделав некоторые преобразования, получим

$$\frac{v_0^2}{v_{\mathrm{II}}^2} = \frac{2pl\dfrac{S}{m}}{v_{\mathrm{II}}^2} = e^{\rho_0 y_* \frac{S}{m}}. \qquad (7)$$

Теперь для простоты записи введем новые безразмерные (проверьте!) величины:

$$x = \rho_0 y_* \frac{S}{m}, \; k = \frac{2pl}{\rho_0 y_* v_{\mathrm{II}}^2}.$$

Первая из них зависит от характеристик тела: $\dfrac{S}{m} = \dfrac{\pi R^2}{4\pi R^3 \rho_S/3} = \dfrac{3}{4\rho_S R}$, где ρ_S – его плотность, а вторая – от параметров ускоряющего канала: давления p и длины l. В этих переменных уравнение (7) выглядит совсем просто:

$$kx = e^x. \qquad (8)$$

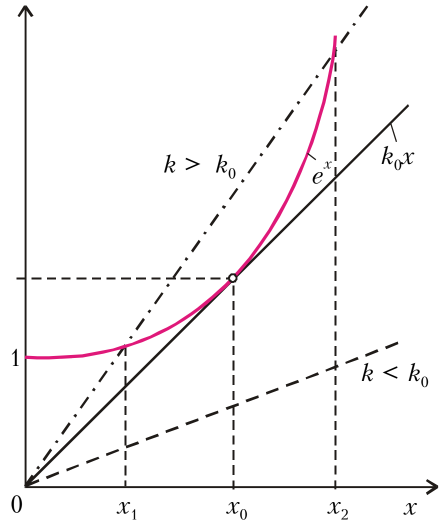

Рис. 2

Слева – уравнение прямой линии, справа – экспоненты. Обе эти линии изображены на рисунке 2. Видно, что при малых значениях k (когда, например, малы давление ускоряющих газов p или длина канала l) решения этого Последнейшего Уравнения (8) не существует: штриховая прямая не пересекает экспоненту. А при некотором значении k_0 имеется единственная точка касания, для которой $x_0 = 1$, $k_0 = e$ (убедитесь подстановкой). Отсюда и найдем все интересующие нас величины:

радиус шарового тела $R_0 = \dfrac{3}{4}\dfrac{\rho_0 y_*}{\rho_S}$,

необходимую длину канала $l_0 = e\dfrac{\rho_0 y_* v_{\mathrm{II}}^2}{2p}$,

начальную скорость выброса $v_0 = \sqrt{e}\, v_{\mathrm{II}}$ $(\approx 1{,}65 v_{\mathrm{II}})$, необходимую для того, чтобы выброшенное вулканом тело, «пробив» атмосферу, все еще имело бы вторую космическую скорость.

(Заметим, однако, что при такой скорости газу трудновато угнаться за телом, тем более – оказывать на него постоянное давление. Так что, вообще говоря, нужно было бы рассматривать *нестационарное* движение сильно нагретых газов при вулканическом взрыве, когда быстро изменяются во времени и температура, и давление газов на ускоряемое тело. Надеемся, так и поступят наши читатели в недалеком будущем.)

Но каковы же канал и шар? Подставив в последние формулы $\rho_0 \sim 1$ кг/м^3, $y_* \sim 10$ км $= 10^4$ м, $\rho_S \sim 5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $p \sim 10^5$ атм $= 10^{10}$ Н/м^2, получим

$$R_0 \approx 1{,}5 \text{ м}, \; l_0 \approx 160 \text{ м}.$$

Масса такого шара равна

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_S \approx 70 \text{ т}.$$

Совсем неплохо для спутника!

Но у Последнейшего Уравнения (8) есть и другие решения. Так, при $k > k_0$ прямая (штрих-пунктир на рисунке 2) дважды пересекает экспоненту. Два корня x_1 и x_2 соответствуют тяжелому и легкому шарам (ведь $x \sim 1/R$). Первый из них может быть выброшен с меньшей скоростью (чем определенная выше v_0), второй – с большей. Это и понятно: для камня сопротивление воздуха менее существенно, чем для пушинки.

И еще. Мы рассмотрели только вертикальный выброс. Конечно, вулкан мог бы выбросить «пробку» и через наклонный ствол (см. рис.1) и, может быть, таким образом породить спутник Земли. Для этого нужна меньшая скорость, а именно – первая космическая $v_{\mathrm{I}} \approx 8$ км/с. Желающие да рассмотрят этот случай сами.

Итак, что сказал бы осторожный физик, принимая во внимание многочисленные упрощающие предположения, сделанные нами в процессе оценок? Он сказал бы: «Если удастся обеспечить постоянное давление вулканических газов порядка 100 атмосфер на длине канала порядка 100 метров, то, пожалуй, вулкан мог бы выбросить из своего жерла тело массой порядка 100 тонн со скоростью, достаточной для того, чтобы это тело ушло на бесконечность от Земли. Если, конечно, найдется такое тело, которое выдержит ускорение в десять тысяч g».

Ну, а нам в любом случае полезно было поговорить о физике на примере такого величественного явления, как извержение вулкана.