

Окончательно получим

$$8 \cdot 10^{2n+2} > 10^{3n}$$

– неравенство, неверное при любом $n \geq 3$.

Замечание 1. Подобным же образом доказывается и общее утверждение: любая степень натурального числа может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.

Замечание 2. Фактически мы доказали существование числа $x = \overline{12abc}$ такого, что $x^3 = 1998\dots$

В действительности таких чисел даже два: $12596^3 = 1998471484736$, а $12597^3 = 1998947500173$. При этом 12596 – наименьшее из всех пятизначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

В. Сендеров

Решения задач M1661 – M1665, Ф1673 – Ф1682

M1661. Можно ли отметить 64 единичных кубика в кубе $8 \times 8 \times 8$ так, чтобы среди любых 8 отмеченных кубиков некоторые два находились в одном слое, параллельном грани куба, и при этом в каждом слое, параллельном грани, было отмечено 8 кубиков?

Ответ: да.

Можно считать, что центры кубиков расположены в точках (x, y, z) , $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $0 \leq x, y, z \leq 7$. Отметим все клетки, центры которых имеют сумму координат, кратную восьми. Нетрудно сообразить, что таких клеток будет ровно 64, по 8 в любом слое, параллельном грани. Допустим, что нам удалось выбрать восемь отмеченных клеток, никакие две из которых не лежат в одном слое, параллельном грани. Тогда сумма координат этих клеток должна быть равна утроенной сумме чисел от 0 до 7. Этого не может быть, поскольку это число не делится на 8.

А.Вершик

M1662. Может ли куб натурального числа начинаться с 1998?

Ответ: да, может.

Предположив противное, рассмотрим кубы, большие чем 10^{3n} . Наименьшее из чисел y^3 , больших $1998 \cdot 10^{3n}$, не меньше чем $1999 \cdot 10^{3n}$. Обозначим через x^3 наибольший из кубов, меньших чем $1998 \cdot 10^{3n}$; очевидно, $x \geq 10$. Получили:

$$(x+1)^3 - x^3 > 10^{3n}.$$

Но

$$3x^2 + 3x + 1 < 4x^2$$

при $x \geq 10$. Так как

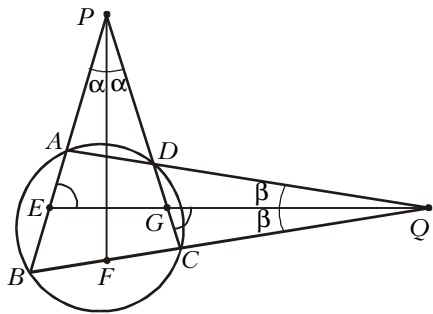
$$x^3 < 2 \cdot 10^{3n+3},$$

то

$$x^2 < 2^{2/3} \cdot 10^{2n+2} < 2 \cdot 10^{2n+2}.$$

M1663. Биссектрисы вписанного четырехугольника образуют в пересечении выпуклый четырехугольник. Докажите, что диагонали полученного четырехугольника перпендикулярны.

Продолжим противоположные стороны исходного четырехугольника до пересечения в точках P и Q (см. рисунок).



Докажем сначала, что биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Поскольку четырехугольник ABCD – вписанный, внешний угол DCQ равен внутреннему углу в противоположной вершине A. Так как прямая QE – биссектриса угла Q, то углы треугольника AQE соответственно равны углам треугольника CQG. Следовательно, $\angle CGQ = \angle AEQ$. Но углы CGQ и PGE равны как вертикальные. Поэтому $\angle PEG = \angle PGE$ и $\triangle PEG$ – равнобедренный.

Следовательно, биссектриса угла P является серединным перпендикуляром к отрезку EG, т.е. биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Отсюда легко следует утверждение задачи, так как диагонали четырехугольника, образованного на биссектрисах четырехугольника ABCD, лежат на биссектрисах PF и QE.

В случае, когда какие-либо две противоположные стороны четырехугольника ABCD параллельны, утверждение задачи следует из симметричности чертежа.

С.Берлов

M1664. Существуют ли отличный от константы многочлен P с целыми коэффициентами и натуральное число $k > 1$ такие, что все числа вида $P(k^n)$ попарно взаимно просты?

Ответ: не существуют.

Предположим противное.

В некоторой точке k^m имеем $|P(k^m)| > 1$. Это следует из того, что $|P(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$; но можно рассуждать и по-другому.

значение он принимает не более чем в r точках; поэтому $|P(k^i)| \leq 1$ не более чем при $3r$ значениях i .

Будем рассматривать ниже вместо k число $k_1 = k^m$. Рассмотрим какой-либо простой делитель p числа $|P(k_1)|$. Если k_1 делится на p (а значит, и свободный член многочлена $P(x)$ делится на p) – все ясно: в этом случае $P(k_1^j)$ делится на p при любом натуральном j .

Пусть k_1 не делится на p . В этом случае из принципа Дирихле следует, что среди чисел k_1^2, k_1^3, \dots найдется такое k_1^j , что $k_1^j \equiv k_1 \pmod{p}$. Следовательно, $P(k_1^j) \equiv P(k_1) \pmod{p}$, т.е. p делит и $P(k_1)$, и $P(k_1^j)$.

Замечание. Если взять вместо k^n более «разреженную» последовательность k^{2^n} , то ответ задачи сменится на противоположный: достаточно положить $P(x) = x + 1$, $k = 2$. Легко показать, что при $n \neq m$ числа $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$ взаимно просты. Такие числа называются *числами Ферма*. Нетрудно доказать и более сильное утверждение: при любом фиксированном натуральном t *обобщенные числа Ферма* $(2t)^{2^n} + 1$ тоже взаимно просты. Таким образом, при построении примера можно брать $k = 2t$, где t – произвольное фиксированное натуральное число.

А.Пастор

M1665. а) В сферу вписано несколько кубов. Каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все кубы имеют общую вершину.

б)* Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют общую вершину. Обязательно ли все четыре имеют общую вершину?

а) В сферу вписаны кубы K_1, K_2, K_n ($n > 3$). Заметим сначала, что если два куба вписаны в сферу и имеют общую вершину, то они имеют общую диагональ, которая является диаметром сферы. При этом, если два куба имеют две общие диагонали, то они совпадают.

По условию задачи кубы K_1, K_2 и K_3 имеют общую вершину, а значит, они имеют общую диагональ d_1 с одним из концов в этой вершине. Кубы K_2, K_3 и K_4 тоже имеют общую диагональ d_2 . Если диагонали d_1 и d_2 совпали, то все четыре куба имеют одну общую диагональ (а значит, две общие вершины). Если же d_1 и d_2 не совпали, то кубы K_2 и K_3 имеют две общие диагонали d_1 и d_2 , а значит, кубы K_2 и K_3 совпадают, и тогда по условию кубы K_1, K_2, K_3 и K_4 имеют общую вершину. Приведенное рассуждение можно считать первым шагом индукции, но заключительный переход от n к $n + 1$ проводится точно так же.

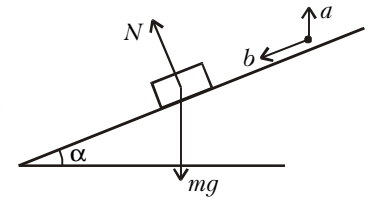
б) Возьмем вспомогательный куб и впишем в него вспомогательный правильный тетраэдр с вершинами в вершинах куба. Четыре нужных нам куба получаются, когда мы симметрично отразим вспомогательный куб относительно каждой из четырех граней вспомогательного тетраэдра. Каждые три из этих кубов имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

В.Произволов

Ф1673. На гладком клине с углом α при основании находится небольшое тело. С каким вертикальным ускорением нужно двигать клин, чтобы тело оставалось на одной и той же высоте?

На рисунке показаны силы, действующие на тело при движении, и разложенное на составляющие ускорение

тела. А именно: ускорение представлено в виде векторной суммы вертикального ускорения a , с которым тело движется вместе с клином, и ускорения b вдоль клина.



Полное ускорение тела вдоль вертикального направления равно нулю:

$$b \sin \alpha - a = 0.$$

Для сил в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления можно записать

$$N \cos \alpha - mg = 0, \quad N \sin \alpha = mb \cos \alpha.$$

После простых преобразований получаем

$$a = g \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

А.Клинов

Ф1674. В системе, изображенной на рисунке 1, ускорения блоков направлены по вертикали, куски нитей также вертикальны. С какими силами приходится при этом действовать на блоки? Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы.

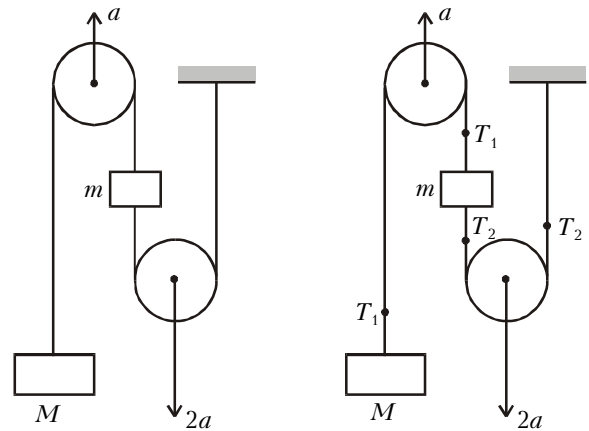


Рис. 1

Рис. 2

По условию задачи ускорение груза массой m направлено вниз и равно $4a$. Тогда (рис.2)

$$mg + T_2 - T_1 = 4ma.$$

Ускорение груза массой M при этом направлено вверх и равно $6a$. Для него

$$T_1 - Mg = 6Ma.$$

Из этих уравнений находятся силы T_1 и T_2 . На верхний блок нужно действовать силой

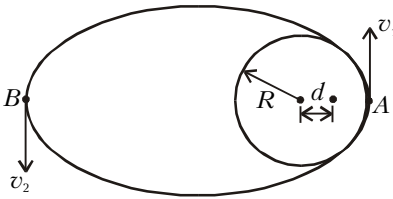
$$F_1 = 2T_1 = 2M(g + 6a),$$

а к нижнему блоку нужно прикладывать силу

$$F_2 = 2T_2 = 2(M(g + 6a) + m(4a - g)).$$

М.Учителев

Ф1675. Для съемок очередного фильма Спилберга был изготовлен макет Земли – в натуральную величину и с той же массой (внутри большого очень легкого пласт-



массового шара находится тяжелый шар из очень плотного вещества). В результате неточностей при сборке центр масс тяжелого шара оказался смещенным в плоскости экватора на расстояние $d = 100$ км от центра большого шара. Найдите минимальное время оборота спутника, который движется в экваториальной плоскости.

Найдем «минимальную» орбиту спутника. Пусть она почти касается Земли в точке A – ближайшей к сдвинутому центру масс (см. рисунок). Ускорение спутника в этой точке перпендикулярно вектору скорости \vec{v}_1 и определяется гравитационным притяжением «Земли»:

$$a = \frac{GM}{(R-d)^2} = \frac{v_1^2}{R}$$

(мы учли, что радиус кривизны орбиты в этом месте не может быть меньше радиуса Земли R). Отсюда мы можем найти наименьшую возможную скорость в этой точке:

$$v_1 = \frac{\sqrt{GMR}}{R-d}$$

Рассмотрим теперь самую дальнюю точку орбиты B . Обозначим высоту спутника над поверхностью через x , тогда расстояние от спутника до центра масс в этой точке получится $R + d + x$. Для нахождения связи между скоростями в ближней и дальней точках траектории воспользуемся законом сохранения момента импульса (или вторым законом Кеплера):

$$v_2(R+d+x) = v_1(R-d)$$

и законом сохранения энергии (энергия взаимодействия спутника и «Земли» отрицательна!):

$$-\frac{GMm}{R-d} + \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{GMm}{R+d+x} + \frac{mv_2^2}{2}$$

Подставив сюда значение v_1 из предыдущего уравнения и исключив v_2 , найдем значение высоты x :

$$x = \frac{2d^2}{R-2d} \approx 3200 \text{ м.}$$

Получилась совсем небольшая высота; значит, размер большой полуоси эллипса практически не отличается от радиуса Земли и период обращения T_1 почти равен $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 5060$ с – периоду обращения вокруг Земли по круговой орбите радиусом R . Отношение этих периодов можно найти, используя третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{R+x/2}{R}\right)^{3/2} \approx 1,0004$$

Замечание. На рисунке изображен сильно вытянутый эллипс, однако из расчетов следует, что это практически окружность.

З.Рафаилов

Ф1676. При изучении падения тел в воздухе были получены любопытные результаты. Металлический шарик падал с установившейся скоростью 100 м/с, шарик вдвое большего диаметра из того же металла падал с установившейся скоростью 140 м/с. К маленькому шарiku прикрепили длинную нить, и с таким «хвостом» он падал с установившейся скоростью 15 м/с. Когда длину «хвоста» увеличили в два раза, скорость установившегося падения уменьшилась до 9 м/с. Попробуйте оценить скорость падения этого шарика при очень большой длине «хвоста». Считайте, что «хвост» при движении не изгибается, а остается вертикальным.

При падении шарика в воздухе на него действует сила лобового сопротивления, пропорциональная квадрату его скорости и площади поперечного сечения падающего тела – данные в условии задачи числа позволяют это установить (при увеличении диаметра шарика в два раза его масса увеличивается в восемь раз, а площадь поперечного сечения – в четыре раза, отношение скоростей установившегося движения 140/100 как раз соответствует «квадратичному» закону). На шарик с «хвостом», кроме силы лобового сопротивления, действует еще сила вязкого трения (на нить), пропорциональная скорости падения и величине боковой поверхности «хвоста», т.е. длине нити. Эта сила явно получается «главной» – скорость установившегося движения в случае шарика с нитью во много раз меньше скорости шарика без нити. Ясно также, что придется учесть и массу длинной нити. Итак, не учитывая силу лобового сопротивления и обозначив массу шарика M , массу единицы длины нити ρ , длину нити в первом случае L , во втором $2L$ и в третьем nL , запишем условия движения системы с установившейся скоростью:

$$(M + \rho L)g = kLv_3,$$

$$(M + \rho \cdot 2L)g = k \cdot 2Lv_4,$$

$$(M + \rho \cdot nL)g = k \cdot nLv_5.$$

После простых преобразований найдем

$$M = 4\rho L, \quad \frac{M + \rho nL}{M + \rho L} = \frac{M + \rho nL}{5\rho L} = \frac{nv_5}{v_3}$$

При большом n получим

$$\frac{v_5}{v_3} = \frac{1}{5}, \text{ и } v_5 = \frac{v_3}{5} = 3 \text{ м/с.}$$

Р.Шариков

Ф1677. В жестком закрытом литровом сосуде находится 900 г воды; воздуха в сосуде нет. Температура внутри сосуда +100 °С. Содержимому сосуда сообщили 1000 Дж тепла. Оцените количество испарившейся при этом воды. Считайте, что при повышении температуры до +101 °С давление насыщенных паров воды увеличивается от 1 атм до 1,04 атм.

Часть переданного системе тепла пойдет на нагревание воды, часть – на испарение. Попробуем оценить соотношение этих частей.

Пусть все тепло пошло на нагрев – тогда изменение температуры воды составит

$$\Delta T = \frac{Q}{cm} = \frac{1000 \text{ Дж}}{4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} \cdot 0,9 \text{ кг}} \approx 0,26 \text{ К.}$$

При этом давление насыщенных паров увеличится от 1 атм до 1,01 атм, и «лишнее» количество пара в объеме 0,1 л составит

$$\Delta m_1 = \frac{MV\Delta p}{RT} = \frac{0,018 \text{ кг/моль} \cdot 0,0001 \text{ м}^3 \cdot 1000 \text{ Н/м}^2}{8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 373 \text{ К}} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ кг}.$$

А если бы все тепло ушло на испарение, то испарилось бы

$$\Delta m_2 = \frac{Q}{r} = \frac{10^3 \text{ Дж}}{2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг},$$

что во много раз больше дополнительного количества испарившейся воды, определяемого насыщением пара. Очевидно, что только очень небольшая часть тепла пойдет на испарение – «лишнее» количество воды не может испариться, так как очень быстро наступит насыщение пара в свободной части объема. Можно теперь вычестить количество теплоты, необходимое для испарения массы воды Δm_1 , и уточнить величину ΔT , т.е. найти $\Delta T_1 = (Q - r\Delta m_1)/cm$. Однако поправка получится совсем малой: $r\Delta m_1/Q = \Delta m_1/\Delta m_2 \approx 0,015 = 0,15\%$, и ею вполне можно пренебречь.

Итак, первая оценка выглядит вполне разумной, и количество испарившейся воды чуть меньше $\Delta m_1 \approx 0,6$ мг.

Р.Александров

Ф1678. К выводам источника подключают последовательно амперметр и вольтметр, который показывает при этом напряжение 6 В. Когда параллельно ему подключили еще один такой же вольтметр, они в сумме показали 10 В. Подключим параллельно еще очень много таких же вольтметров. Сколько они в сумме покажут? Во сколько раз при этом возрастут показания амперметра?

Обозначим сопротивление амперметра буквой r (если источник не идеальный, используем это обозначение для суммы сопротивления амперметра и внутреннего сопротивления источника). Для случая, когда вольтметр показывает напряжение $U_1 = 6$ В, можно записать

$$rI = U - U_1,$$

где U – напряжение на источнике. Во втором случае, когда вольтметры показывают по $U_2 = 5$ В, полный ток через амперметр увеличится в $(5+5)/6$ раз и составит $I \cdot 10/6$. Тогда получим

$$r \cdot \frac{10}{6} I = U - U_2.$$

У нас теперь есть два уравнения с тремя неизвестными – но нам вовсе не обязательно находить все неизвестные величины r , I и U . Нас интересует, во сколько раз ток, который будет течь через амперметр при большом количестве соединенных параллельно вольтметров, превышает величину I , тогда мы легко найдем и сумму показаний вольтметров.

Итак, при большом количестве вольтметров напряжение на каждом из них должно получиться совсем малым, и для тока kI запишем соотношение

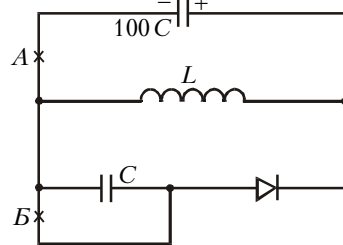
$$r \cdot kI = U.$$

Из полученных уравнений находим $k = 5$. Следовательно, суммарный ток (сумма токов через все вольтметры) в 5 раз больше, чем в самом первом случае, когда один вольтметр показывал 6 В. А это означает, что сумма показаний вольтметров возрастет тоже в 5 раз, т.е. будет равна 30 В.

А.Простов

Ф1679. В вашем распоряжении есть незаряженный конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения U конденсатор емкостью $100C$, катушка индуктивности и полупроводниковый диод (никаких других элементов у вас нет). До какого максимального напряжения можно было бы зарядить конденсатор малой емкости, если бы все эти элементы были идеальными? Как для этого нужно было бы действовать? Можете ли вы придумать больше одного способа?

Мы можем придумывать самые разные схемы «перекачки» зарядов, но если у нас нет источников дополнительной энергии, то в лучшем случае вся начальная энергия без потерь будет перенесена в конденсатор емкостью C , при этом его напряжение окажется в 10 раз больше величины U . Одна из возможных схем приведена на рисунке. После подключения конденсатора емкостью $100C$, заряженного в показанной на рисунке полярности, к остальной части схемы по катушке начнет течь ток (диод не дает заряжаться конденсатору емкостью C). Подождя некоторое время (больше чем $T/4 = 0,5\pi\sqrt{L \cdot 100C}$), перережем провод в точке A – к этому моменту конденсатор емкостью $100C$ окажется разряженным, а по замкнутому контуру катушка–диод будет течь неизменный по величине ток, т.е. вся энергия конденсатора перейдет в энергию катушки (по условию элементы цепи можно считать идеальными). Осталось перерезать провод в точке B – тогда начнет заряжаться конденсатор емкостью C . Когда ток через катушку уменьшится до нуля и вся энергия катушки перейдет в энергию заряжаемого конденсатора, процесс прекратится – диод не позволит зарядам покинуть конденсатор, в котором и окажется вся энергия. В этом случае напряжение конденсатора емкостью C станет равным максимально возможному, и условие задачи будет выполнено.



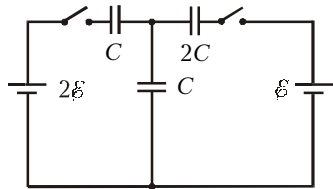
Есть еще несколько способов добиться такого же результата (если бы мы могли мгновенно и в нужный момент подключать и отключать конденсаторы, мы смогли бы даже обойтись без диода!). Однако идеальную катушку нельзя «отрывать» от внешней цепи даже на очень короткое время, поэтому не всякая схема пригодна. Обсудим, например, такой вариант – подключим к заряженному конденсатору емкостью $100C$ последовательную цепь из катушки, пропускающей в данной полярности диода и незаряженного конденсатора емкостью C . По цепи протечет некоторый заряд, и процесс прекратится. Теперь поменяем местами выводы конденсатора емкостью C – процесс продолжится, и заряд этого конденсатора возрастет. Повторим такие переключения несколько раз – после очередного переключения конденсатор емко-

стью 100С будет практически разряжен, а почти вся его энергия окажется у конденсатора емкостью С. Если на этом остановиться, условие задачи окажется выполненным. Подумайте, однако, что произойдет, если продолжить процесс переключений.

А.Зильберман

Ф1680. В схеме, изображенной на рисунке, поочередно замыкают переключатели (перед замыканием одного из них другой размыкают). Найдите напряжение «среднего» конденсатора после большого числа переключений. Элементы цепи считайте идеальными. Конденсаторы вначале не заряжены.

Если вначале замкнуть левый ключ, присоединенный к батарейке с напряжением 2Е, конденсаторы емкостями С и 2С зарядятся каждый до напряжения Е, и дальнейшие включения-выключения уже ничего не изменят – конденсатор емкостью 2С не будет заряжаться вовсе (он подключается между плюсом батарейки с напряжением Е и плюсом конденсатора емкостью С, заряженного до такого же напряжения). Если же первым замкнуть правый ключ, присоединенный к батарейке с напряжением Е, то процесс будет более сложным. После первого замыкания этого ключа конденсатор емкостью 2С зарядится до напряжения Е/3, а «средний» конденсатор емкостью С – до напряжения 2Е/3. Разомкнем этот ключ и замкнем второй. Простой расчет показывает, что теперь «средний» конденсатор будет заряжен до 4Е/3, «правый» конденсатор – до напряжения 2Е/3, а заряд «левого» не изменится. Разомкнем этот ключ и снова замкнем первый – напряжение «среднего» конденсатора станет равным 8Е/9, а «левый» конденсатор зарядится до напряжения Е/9. Можно проводить анализ и дальше, но ясно, что напряжение «среднего» конденсатора приближается к Е, а напряжение «левого» – к нулю. Легко можно вывести формулу: после каждой пары переключений напряжение «левого» конденсатора уменьшается в три раза.



Итак, после большого числа переключений напряжение «среднего» конденсатора станет очень близким к Е.

А.Зильберман

Ф1681. На ферромагнитный кольцевой сердечник с очень большой магнитной проницаемостью намотаны две совершенно одинаковые обмотки – катушки индуктивностью L каждая. Последовательно с одной из обмоток включаем конденсатор емкостью С, к получившейся последовательной цепочке подключаем параллельно вторую обмотку. При помощи генератора синусоидального напряжения и лампочки накаливания исследуем свойства получившейся схемы (рис.1). Как меняется накал лампочки при изменении частоты генератора? Что изменится, если поменять местами выводы одной из обмоток?

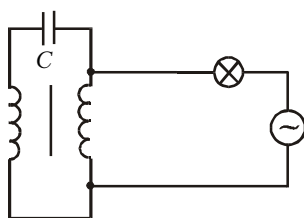


Рис. 1

В одном из возможных вариантов включения выводов

катушек напряжение, приложенное к конденсатору, все время равно нулю, и ток в левой части цепи течь вообще не будет – тогда останется только правая катушка. В этом случае накал лампочки при увеличении частоты генератора будет монотонно убывать – индуктивное сопротивление катушки пропорционально частоте.

Если теперь любую из катушек переключить наоборот, то напряжения катушек останутся равными, но теперь они не вычитаются, а складываются. Исследуем получившийся двухполюсник (рис.2): приложим к его выводам переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$ и посмотрим, какой ток потечет от источника. Напряжение одной из катушек равно напряжению источника, а равенство магнитных потоков через катушки приводит к тому, что и напряжение второй катушки будет таким же. Значит, к конденсатору будет приложено удвоенное напряжение источника, и через него будет идти ток $I_2 = -2U_0 \omega C \sin \omega t$. Поле, пронизывающее витки каждой из катушек, определяется разностью токов в них:

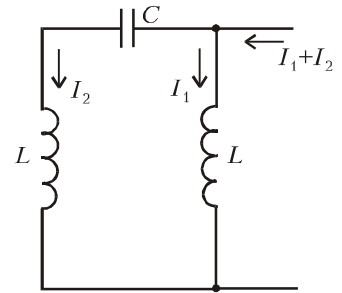


Рис. 2

$$L(I_1' - I_2') = U_0 \cos \omega t,$$

и

$$I_1 - I_2 = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t.$$

Общий ток равен

$$I_1 + I_2 = (I_1 - I_2) + 2I_2 = U_0 \left(\frac{1}{\omega L} - 4\omega C \right) \sin \omega t,$$

а сопротивление двухполюсника составляет

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - 4\omega C} = \frac{\omega L}{1 - 4\omega^2 LC}.$$

Такая зависимость Z от частоты ω характерна для параллельного контура из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью 4C. Видно, что на низких частотах двухполюсник ведет себя как катушка, а на высоких – как конденсатор. Таким образом, накал лампочки становится большим на совсем низких и на достаточно высоких частотах. По мере возрастания частоты от малых значений накал лампочки уменьшается. На частоте $\omega_p = 1/(2\sqrt{LC})$ сопротивление двухполюсника возрастает до очень больших значений – при приближении к этой частоте накал лампочки уменьшается практически до нуля, а дальше снова возрастает при увеличении частоты.

З.Рафаилов

Ф1682. В половине шара радиусом R из прозрачного стекла с коэффициентом преломления $n = 2$ сделано симметричное сферическое углубление так, что толщина стекла на линии центров сфер составляет R/2 (рис.1). Точечный источник света помещен в точке А (в центре внешней сфе-

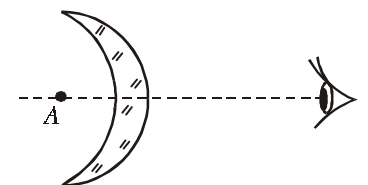


Рис. 1

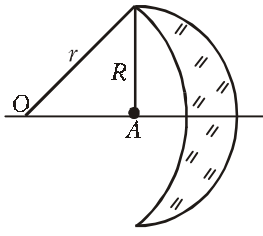


Рис. 2

рической поверхности). Где его видит наблюдатель, глаз которого находится вдали на линии центров сферических поверхностей?

Найдем радиус кривизны r углубления – внутренней сферической поверхности (рис.2). Из прямоугольного треугольника получим

$$r^2 = R^2 + (r - R/2)^2, \text{ и } r = 1,25R.$$

Теперь построим ход луча, испущенного источником (рис.3). Для удобства мы будем изображать на рисунке лучи, падающие на сферические поверхности под достаточно большими углами (иначе ничего нельзя будет разобрать), но надо помнить, что изображение формируется лучами, идущими под очень малыми углами к главной оптической оси – зрачок наблюдателя маленький и расположен далеко. Поэтому мы можем пользоваться стандартными упрощениями – для малых углов заменять синусы и тангенсы значениями самих углов, выраженными в радианах. Итак, рассмотрим ход луча, испущенного под углом α к главной оси. Он попадает на внутреннюю сферическую поверхность на расстоянии $0,5R\alpha$ от оси.

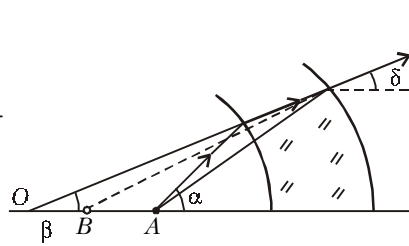


Рис.3

Нарисуем луч, падающий в эту же точку из центра внутренней сферической поверхности O (нормаль); пусть он составляет с главной осью угол β . Легко выразить этот угол через α :

$$0,5R\alpha = r\beta = 1,25R\beta, \text{ и } \beta = 0,4\alpha.$$

Угол падения луча с нормалью составит при этом $0,6\alpha$, а после преломления на поверхности стекла с $n = 2$ получится угол $0,3\alpha$ с нормалью. С главной оптической осью это луч составляет угол $0,4\alpha + 0,3\alpha = 0,7\alpha$. Ко второй сферической поверхности (внешней) луч подойдет изнутри на расстоянии $0,5R\alpha + 0,5R \cdot 0,7\alpha = 0,85R\alpha$ от главной оптической оси. Проведем нормаль к сферической поверхности в этой точке (радиус из точки A – центра этой поверхности) – угол между этим радиусом и главной оптической осью получится $\gamma = 0,85R\alpha/R = 0,85\alpha$, тогда угол падения составит $\gamma - 0,7\alpha = 0,15\alpha$, а после преломления угол увеличится вдвое и будет равен $0,3\alpha$. Вышедший луч составит угол $\delta = \gamma - 0,3\alpha = 0,55\alpha$ с главной оптической осью. Продолжение этого луча пересекается с главной оптической осью в точке B на расстоянии $L = 0,85R\alpha/0,55\alpha = 17R/11 \approx 1,55R$ от места выхода луча (с учетом малости углов – от точки пересечения внешней сферической поверхности с главной оптической осью). Мы взяли произвольный малый угол падения луча источника на нашу линзу, положение полученной точки не зависит от величины этого угла – узкий пучок лучей после преломления кажется исходящим из этой точки; следовательно, мы нашли положение изображения, наблюдаемого глазом.

А. Очков

НАМ ПИШУТ

Супермагические квадраты

На рисунках 1 и 2 приведены магические квадраты, обладающие целым букетом замечательных свойств. Напомним, что числовая таблица называется

Первый супермагический квадрат 8 × 8 на шахматной доске

8	6	5	8	7	2	1	4	3
394	243	457	306	194	43	257	106	
7	4	3	6	5	8	7	2	1
156	207	293	344	356	407	93	144	
6	2	1	4	3	6	5	8	7
56	107	193	244	256	307	393	444	
5	8	7	2	1	4	3	6	5
494	343	157	6	294	143	357	206	
4	3	4	5	6	7	8	1	2
242	189	311	258	442	389	111	58	
3	5	6	7	8	1	2	3	4
208	361	339	492	8	161	139	292	
2	7	8	1	2	3	4	5	6
308	461	39	192	108	261	239	392	
1	1	2	3	4	5	6	7	8
142	89	211	158	342	289	411	358	
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 1

магическим квадратом, если сумма чисел в каждом ее горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и по каждой из диагоналей одна и та же – эта сумма называется магической константой. Магическая константа обоих приведенных квадратов равна 2000. Дру-

Второй супермагический квадрат 8 × 8 на шахматной доске

8	227	53	433	761	107	139	233	47
7	89	239	389	509	73	11	449	241
6	353	127	83	13	181	109	383	751
5	97	61	163	191	409	401	331	347
4	151	797	317	29	419	43	113	131
3	311	443	431	101	79	307	179	149
2	269	23	167	197	293	709	271	71
1	503	257	17	199	439	281	41	263
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 2

гие замечательные свойства этих квадратов связаны с маршрутами шахматных фигур и расположением шахматных полей.

Квадрат рисунка 1. Рассмотрим любую из 20 горизонтальных полосок, состоящих из 4 соседних клеток и расположенных на территории «белых» фигур (т.е. в пределах первых четырех горизонталей на шахматной доске). Каждой такой полоске соответствует симметричная ей относительно горизонтальной оси полоска из 4 клеток на территории «черных» фигур. Например, полоске b3-c3-d3-e3 соответствует полоска b6-c6-d6-e6. Сумма чисел, стоящих в клетках каждой пары симметричных полосок, равна магической константе 2000.

Рассмотрим маршруты движения белопольного слона – главную диагональ a8-h1 и три пары малых диагоналей: а) a3-b1, c8-h3; б) a4-d1, e8-h5; в) a6-f1, g8-h7. Суммы чисел, расположенных на восьми полях главной диагонали и каждой из пар малых диагоналей, равны магической константе. Та-