

О волнах, поплавках, шторме и прочем

Е. СОКОЛОВ

О ВОЛНАХ НА ВОДЕ НА СТРАНИЦАХ журнала «Квант» рассказывалось уже не раз. Но тема эта неисчерпаема. Вглядываясь в ряды волн, бегущих по бушующему морю, или в рябь на поверхности тихой речушки, невольно поражаешься изменчивости и многообразию возникающих картин. И тем заманчивее становится желание найти скрытые закономерности, управляющие таким движением.

В этой статье мы обсудим три явления, связанные с кинематикой распространения гравитационных волн по поверхности воды. В дни летнего досуга вы можете исследовать их экспериментально. Инвентарь для этого вам понадобится нехитрый: поплавок, часы да пригоршня камней.

Цуг волн

Эта история произошла на рыбалке. Клева не было, и, дожидаясь лучших времен, я принялся подсчитывать число волн, время от времени поднимающих поплавок. Однако через некоторое время мое душевное равновесие было нарушено. Подсчет не сошелся. Волны упорно отказывались подчиняться обычной арифметике. В чем дело? Что произошло? Попробуем разобраться.

Для начала обсудим такой простой вопрос:

По спокойной поверхности водоема бежит группа волн, состоящая из 20 горбиков (рис.1). (Другие научные названия такого образования: *цуг волн*, *волновой пакет*.) Сколько раз поплавок поднимется вверх?

Обычно здесь все солидарны – 20 раз. Правда, иногда осторожные люди дают более уклончивый ответ: ну, может быть, 19 или 21. Но при этом все мы ошибаемся и ошибаемся существенно. На самом деле двадцать горбиков поднимают поплавок сорок раз, пятьдесят горбиков – сто раз, сто – двести раз!

Это настолько непривычно, что однажды один из слушателей, для того чтобы доказать нелепость такого ответа, специально изготовил из бумаги модель цуга (рис.2,а) и предложил всем желающим непосредственно «руками» проверить, сколько раз поднимется поплавок за время прохождения цуга мимо неподвижного наблюдателя. На бумаге получилось 20, но на воде всегда получается ровно в два раза больше. В чем же ошибка?



Иллюстрация П. Чернуского

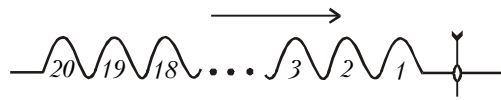


Рис. 1

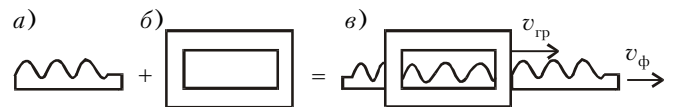


Рис. 2

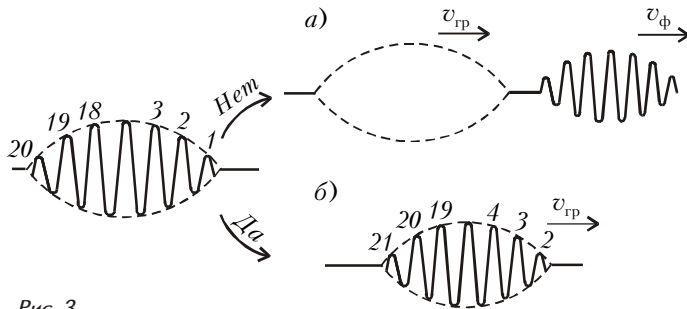


Рис. 3

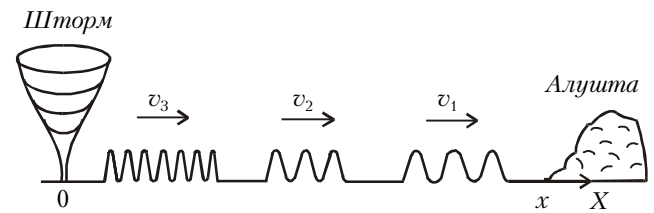


Рис. 4

Оказывается, чтобы правильно произвести подсчет в модельном эксперименте, его следовало бы проводить несколько иначе. Вместе с моделью волны надо еще изготовить экран с прорезью (рис.2,б), в которую помещается ровно 20 горбиков. И показывать их надо вместе, только двигать с разными скоростями (рис.2,в). Дело в том, что при анализе движения волновых пакетов следует пользоваться двумя правилами.

Во-первых, волновой пакет – это симбиоз двух объектов: плавной *оггибающей* и быстрomenяющейся *наполняющей*. Во-вторых, у каждого типа волн не одна, а две скорости. Первая (именно о ней мы обычно говорим как о скорости движения волны) – это фазовая скорость волны v_ϕ , т.е. скорость, с которой движется наполняющая, в нашем случае – горбики. Вторая – это групповая скорость волны $v_{гр}$, с которой движется огибающая, в нашем примере – экран. Фазовая и групповая скорости связаны между собой соотношением

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}(kv_\phi),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число волны. Мы будем пользоваться именно этим числом, а не длиной волны λ , так как это существенно упрощает математические записи. Отметим важную особенность приведенного соотношения. Если v_ϕ не зависит от k , то $v_{гр} = v_\phi$. Эти скорости различны только в том случае, если v_ϕ зависит от длины волны, т.е. если волны обладают *дисперсией*.

Предвидя возможные возражения, давайте сразу же обсудим эти правила. Первое вряд ли вызовет сомнения. С точки зрения математики,

профиль волнового пакета $h(x)$ представляет собой произведение двух функций: гладкой функции $F(x)$ – огибающей и бесконечной гармонической волны – наполняющей:

$$h(x) = F(x)\cos(kx).$$

Что касается второго правила, то здесь могут возникнуть вопросы. Например, такие. Разве могут облочка и содержимое двигаться с разными скоростями, и как же тогда назвать то, что получится спустя некоторое время? Оказывается, могут. Только происходит это движение не так, как показано на рисунке 3,а, а иначе. Горбик не обгоняет огибающую. Просто доходя до переднего фронта, он исчезает, а ему на смену на заднем фронте рождается новый (рис.3, б). Стать первым, чтобы исчезнуть, – вот кредо каждого горбика.

А как получить формулу, связывающую групповую и фазовую скорости? Здесь достаточно ограничиться лишь пояснением. Рассмотрим простой «суррогат» волнового пакета – две волны, имеющие частоты $\omega + \Delta\omega/2$ и $\omega - \Delta\omega/2$ и волновые числа $k + \Delta k/2$ и $k - \Delta k/2$ соответственно. Их сумма равна

$$\begin{aligned} & A \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) + \\ & + A \cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) = \\ & = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Видно, что основная волна – с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ и скоростью $v_\phi = \omega/k$ – модулируется огибающей в виде волны с длиной волны $\lambda =$

$$= 2\pi/\Delta k \text{ и скоростью } v_{гр} = \Delta\omega/\Delta k = \Delta(v_\phi k)/\Delta k.$$

Теперь нам по силам объяснить, почему число подъемов поплавка ровно в два раза больше числа горбиков. Причина – в особом законе дисперсии для гравитационных волн, который мы примем без доказательства¹:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Вычислим групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}v_\phi.$$

Это и есть ключ к отгадке! Групповая скорость для гравитационных волн ровно в два раза меньше, чем фазовая. За время, пока волновой пакет пройдет мимо точки наблюдения (поплавка), успеет родиться еще ровно столько же гребней, сколько содержится в волновом пакете. И на каждом из этих гребней поднимется поплавок.

Вернемся к модельному эксперименту. Будем двигать и огибающую и наполняющую, только скорость наполняющей установим в два раза большей скорости огибающей. Проверим, сколько раз поднимется поплавок. Все правильно – ровно 40 раз!

Шторм

Попробуем свои силы на более масштабной задаче:

¹ Можно получить этот закон с помощью метода размерностей. Действительно, скорость гравитационных волн v (размерность м/с) может зависеть только от плотности ρ (кг/м³), ускорения свободного падения g (м/с²) и длины волны λ (м). Единственно возможный вариант: $v \sim \sqrt{g\lambda}$. (Прим. ред.)

20 июля 1996 года в 9 часов утра на южном побережье Крыма в районе Алушты было спокойно – полный штиль. Но о берег с завидной регулярностью бились волны. Период ударов не составляло труда измерить – он оказался равным 5,0 с. 21 июля в тот же час и в том же месте по-прежнему был штиль, но по-прежнему на море было волнение. Однако период ударов волн был уже другой – 3,3 с. Надо определить, когда и на каком расстоянии от берега разыгрался шторм.

Выберем в качестве рабочей модели следующую. В некоторой области Черного моря в некоторый неизвестный пока момент времени разразился шторм. Шторм – это ветер, шум, брызги и, конечно, рождение волн. Волны разбегаются в разные стороны и через некоторое время достигают берега. Вот почему даже в штиль море может быть беспокойным.

Теперь проведем расчет. Поместим начало координат в эпицентр шторма (рис.4). Тогда в точку с координатой x к моменту времени t придет группа волн, у которых групповая скорость равна x/t :

$$v_{гр} = \frac{1}{2}v_{\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t}.$$

Отсюда легко определить волновой вектор и период пришедших волн:

$$k = \frac{gt^2}{4x^2},$$

$$T = \frac{\lambda}{v_{\phi}} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{4\pi x}{gt}.$$

Видно, что период пришедших волн уменьшается с течением времени (рис.5, а). Это легко объяснить. Длинные волны имеют большую скорость, поэтому приходят раньше. Но у них и период больший:

$$T = \frac{\lambda}{v_{\phi}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

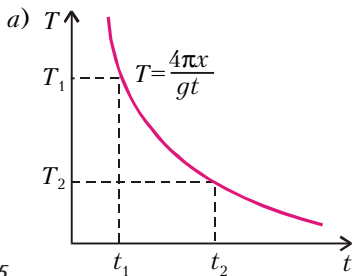


Рис. 5

Для вычисления расстояния до эпицентра и времени начала шторма удобно построить график зависимости частоты $\nu = 1/T$ приходящих волн от времени (рис.5,б). С его помощью, используя данные нашей задачи, легко получить

$$t = \Delta t \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \Delta t \frac{T_2}{T_1 - T_2} =$$

$$= 24 \text{ ч} \frac{3,3 \text{ с}}{5 \text{ с} - 3,3 \text{ с}} \approx 47 \text{ ч},$$

$$x = \frac{g}{4\pi} \frac{\Delta t}{\nu_2 - \nu_1} =$$

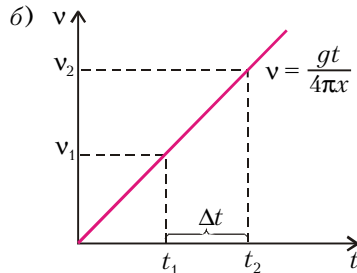
$$= \frac{g}{4\pi} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \Delta t \approx 650 \text{ км}.$$

Итак, шторм разразился в 650 км от берега утром 18 июля 1996 года.

Глядя на эти цифры, невольно задумываешься: а реально ли, что волны проходят по морю такой громадный путь и не затухают за счет вязкого трения? Оказывается, вполне реально. Убедиться в этом можно, оценив по размерности время затухания волн за счет вязкости. Попробуйте сделать это самостоятельно, а мы возьмем из справочника готовую формулу, которая отличается от полученной по размерности лишь постоянным множителем:

$$t = \frac{\lambda^2 \rho}{8\pi^2 \eta}$$

(здесь $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с) – коэффициент вязкости воды), и сделаем вычисления. Подсчет показывает, что уже для обычных волн, бороздящих наши пруды и реки ($\lambda \sim 1$ м), время затухания достаточно велико – порядка 3 часов, а для морских волн ($\lambda \sim 10 - 100$ м) оно в сотни и тысячи раз больше. Поэтому для длинных волн затухание за счет вязкости совершенно несущественно. Оно определяет лишь эволюцию коротких капиллярных волн ($\lambda \sim 1$ см).



Резонанс

«Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою». Воспользуемся и мы советом Козьмы Пруткова и кинем в воду, через равные промежутки времени, сорок камешков. Сколько волн побежит при этом?

Математик скажет – задача некорректна. И будет прав. Но давайте подойдем к этому вопросу без излишней математической строгости и попробуем сначала получить ответ экспериментально. Правда, опыт лучше провести не на пруду, а в длинном, узком и прямом канале – в этом случае движение волн одномерное, и наблюдать их можно гораздо дольше. Результат эксперимента таков: через некоторое время из образовавшегося на поверхности воды хаоса выделится движущийся волновой пакет, состоящий из двадцати волн.

Итак, ответ у поставленного вопроса есть. Теперь попытаемся получить его теоретически.

Для этого надо знать один простой секрет – когда камень падает в воду, он порождает бесконечное количество гармонических волн. «Как же так, – скажете вы, – он просто изменяет профиль поверхности $h(x)$, делая его похожим на параболу». Оказывается, это одно и то же.

Основой такого утверждения является знаменитая *теорема Фурье*, согласно которой любая четная функция $h(x)$ (для наших целей достаточно рассматривать лишь четные функции) может быть представлена как сумма бесконечного количества косинусов (разложена в ряд Фурье):

$$h(x) = \int_0^{\infty} a(k) \cos(kx) dk.$$

Человеку, который первый раз знакомится с теоремой Фурье, она кажется неправдоподобной – косинус совершенно непохож на всем привычную параболу. Но все же она справедлива. Попробуйте построить на экране компьютера функцию, заданную рядом

$$h(x) = -\cos \pi x + \frac{1}{2^2} \cos 2\pi x - \frac{1}{3^2} \cos 3\pi x + \dots$$

на интервале $-1 < x < 1$. Складываем косинусы, а получаем... параболу!

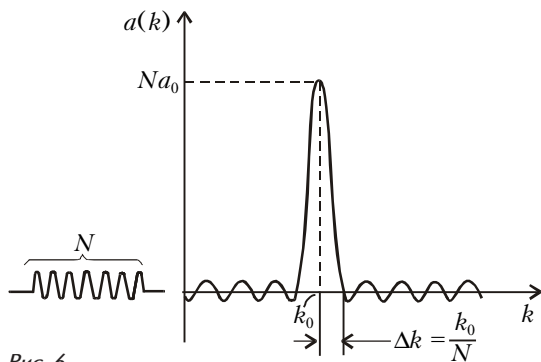


Рис. 6

Коэффициенты $a(k)$ определяют «вес» каждой гармоники в разложении. Для каждого профиля поверхности $h(x)$ их можно определить с помощью интегрирования:

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos(kx) dx.$$

Если вы умеете интегрировать, можете проверить сами, если нет – поверьте на слово.

Отметим необычные свойства спектра, которым обладает волновой пакет. Если на поверхности волновой пакет и может затеряться, то в спектре его присутствие видно сразу (рис.6). Волновому пакету с наполняющей, имеющей волновое число k_0 , и состоящему из N элементарных волн, соответствует пик при $k = k_0$. Высота пика прямо пропорциональна N , а его полуширина, что особенно важно для нас, равна $\Delta k = k_0/N$. (Проверьте это сами, выбрав любую простую огибающую.)

Теорема Фурье дает нам в руки мощное оружие. Теперь решение любой задачи, в которой речь идет об искажении поверхности воды, мы можем начинать стандартными словами: в результате удара произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Именно так мы и поступим.

Итак, в результате удара камня о воду произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Каждая волна начинает свою собственную жизнь. А жизнь гармонической волны проста – она равномерно движется со своей фазовой скоростью. Поэтому спустя время t гармоника, дававшая в начальное разложение вклад $a(k) \cos(kx)$, будет давать вклад

$$\frac{1}{2} a(k) \cos(k(x + vt)) + \frac{1}{2} a(k) \cos(k(x - vt))$$

– для простоты мы будем говорить лишь об одномерной волне, которая бежит вправо и влево. Для нахождения результирующего профиля следует сложить вклады всех гармоник:

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(k) \cos(k(x + vt)) dk + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(k) \cos(k(x - vt)) dk.$$

Теперь вернемся к нашей задаче о камнях. Будем считать, что мы кинули $n = 40$ камней, бросая их через одинаковые промежутки времени τ . Начало решения нам известно. Первый камень упал, создал бесконечно много волн, волны стали двигаться. Второй камень упал... и т.д. Осталось сложить все гармоники от каждого удара с учетом их сдвигов.

Вместо того чтобы приступить к лобовому штурму, посмотрим на суммарный вклад одинаковых гармоник от разных ударов. Для определенности будем считать, что наблюдение мы проводим слева от места падения камней (рядом с ним), поэтому рассмотрим гармоники, бегущие влево. Их общий вклад сразу после послед-

него удара равен

$$\frac{1}{2} a(k) \cos kx + \frac{1}{2} a(k) \cos k(x + v_\phi \tau) + \dots + \frac{1}{2} a(k) \cos k(x + (n-1)v_\phi \tau),$$

или

$$\frac{1}{2} a(k) (\cos(kx) + \cos(kx + \phi) + \dots + \cos(kx + (n-1)\phi)),$$

где $\phi(k) = kv_\phi(k)\tau = \sqrt{kg}\tau$. Сумма косинусов, стоящая в скобках, хорошо известна – она связана и с дифракционными решетками, и с правильными n -угольниками, и с функцией-«гребенкой», изображенной на рисунке 7,а. Но давайте обо всем по порядку.

Как подойти к вычислению такой суммы? Очень просто. Надо от сложения косинусов перейти к более сложной задаче – сложению векторов. Посмотрите на n единичных векторов, изображенных на рисунке 8,а. Если мы построим их сумму, то найдем и интересующую нас сумму косинусов – она будет равна проекции суммарного вектора на ось X . Искомая сумма будет снова косинусом, умноженным на длину суммарного вектора $A(\phi)$:

$$A(\phi) \cos\left(kx + \frac{n-1}{2} \phi\right).$$

Амплитуду $A(\phi)$ можно определить из рисунка 8,б, на котором мы изобразили эти же векторы приложенными друг к другу. Вычисление оставляем вам в качестве упражнения, а здесь дадим лишь ответ:

$$A(\phi) = \frac{\sin \frac{n}{2} \phi}{\sin \frac{\phi}{2}}.$$

Функция-«гребенка» и есть график

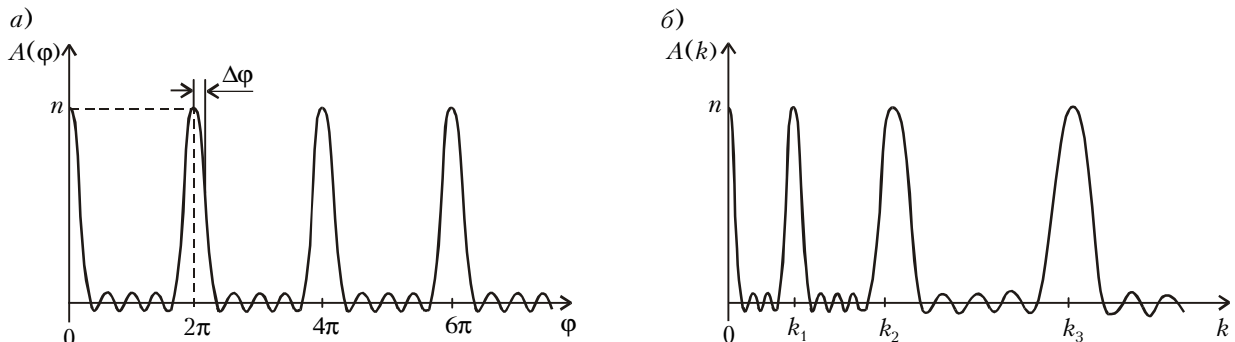


Рис. 7

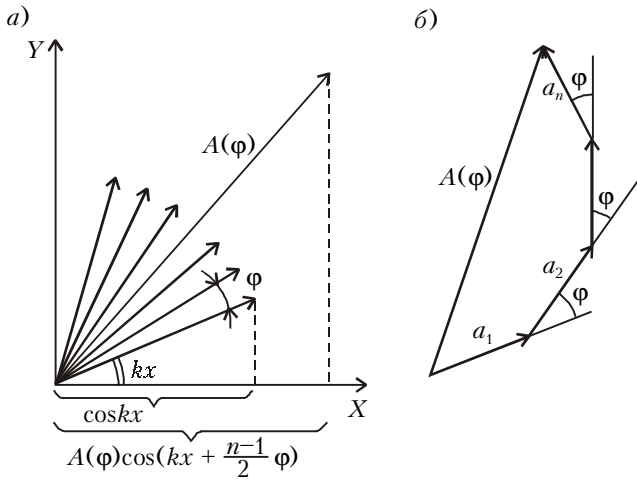


Рис. 8

этой функции. Особенности ее строения легко понять, если обратиться к векторной диаграмме (рис.9). При $\varphi(k) = 2\pi m$ все векторы вытянуты в линию, и их суммарная длина $A(\varphi) = n$. При небольшом изменении на $\Delta\varphi = 2\pi/n$ они складываются в правильный n -угольник, а $A(\varphi) = 0$. Затем происходит долгое движение вблизи нуля, пока при возрастании $\Delta\varphi$ на 2π векторы снова не вытянутся в ряд.

Скомпоновав таким образом вклад одинаковых гармоник от всех ударов, для получения ответа нам осталось только проинтегрировать:

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty a(k)A(k) \cos\left(kx + vt + \frac{n-1}{2}\varphi\right) dk.$$

А обязательно ли это делать? Нет, ответ можно предсказать и без интегрирования!

Произведение $a(k)A(k)$ можно рассматривать как спектр суммарного возмущения, а его легко узнать. Амплитуда A , построенная как функция волнового числа $k = \frac{\varphi}{g\tau^2}$, по-прежнему имеет вид «гребенки» с пиками высотой n (см. рис.7,б). Единствен-

ное, теперь пики расположены не равномерно, а соответственно значениям

$$k_m = \frac{4\pi^2 m^2}{g\tau^2}$$

и полуширины у них различны:

$$\begin{aligned} \Delta k_m &= \frac{dk}{d\varphi} \Delta\varphi = \\ &= 2k_m \frac{\Delta\varphi}{\varphi_m} = \frac{2k_m}{nm}. \end{aligned}$$

При перемножении гладкой функции $a(k)$ с «гребенкой»

$A(k)$ получится снова «гребенка». Ну, а в таком случае мы, пожалуй, обойдемся без интегрирования. Ведь каждый пик – это волновой пакет (как на рисунке 6)!

Бросив много камней, мы создали бесконечный ряд волновых пакетов. Почему так происходит? Почему возбуждаются не все волны, а лишь избранные и близкие к ним? Причина простая – резонанс. Перепишем условие максимума амплитуды $\sqrt{kg}\tau = 2\pi m$, используя период $T = \lambda/v_\varphi = 2\pi/(kv_\varphi)$. Оно примет вид

$$\tau = mT$$

– а это и есть условие резонанса. Раскачиваются те волны, для которых удары приходятся ровно через период или целое число периодов. Совсем как для обычных качелей.

Рассказывая в начале о результатах наших наблюдений, мы немного лукавили. На самом деле, на воде возникает не один волновой пакет, а несколько (рис.10). Нам удавалось наблюдать пакеты до четвертого порядка включительно. Самое заметное и четкое образование, которое к тому же и появляется первым, – это пакет

первого порядка. В нем $n/2$ горбиков, и он достаточно быстро движется. Если немного подождать на месте, а не идти за первым пакетом, то можно увидеть возникновение более слабого пакета второго порядка, в котором уже n горбиков, а затем – и возникновение пакетов следующих порядков.

Это все можно объяснить теоретически. Длина волны, наполняющей пакет m -порядка, равна

$$\lambda_m = \frac{g\tau^2}{2\pi m^2},$$

поэтому первый волновой пакет состоит из наполняющей с самой большой длиной волны. У него самая большая групповая скорость, он быстрее всех удаляется от начальной точки. А сколько в нем горбиков? На этот вопрос очень просто ответить. Полуширина пика первого порядка составляет $\Delta k = 2k_m/n$, а полуширина волнового пакета, состоящего из N волн, равна k_0/N ; следовательно, в нем $n/2$ горбиков. Волновые пакеты более высоких порядков имеют наполняющую с меньшей длиной волны $\lambda_m = \lambda_1/m^2$. Поэтому групповые скорости у них меньше, и расходятся они через большее время. Кроме того, полуширина соответствующих им пиков меньше: $\Delta k = 2k_m/(nm)$, поэтому пакет m -го порядка состоит из

$$N_3 = \frac{3}{2}n \quad N_2 = n \quad N_1 = \frac{n}{2}$$

Рис.10

$nm/2$ горбиков. Что касается амплитуды, то она в m раз меньше, чем у первого. При увеличении числа волн в пакете он не только должен сужаться, но и вытягиваться. Однако высота пиков «гребенки» $A(k)$ одна и та же.

Итак, бросив в воду сорок камушков, вы увидите двадцать горбиков.

Сознаюсь, этот ответ мне по душе. Он подтверждает присущее всем нам чувство веры в общность и неизбежность законов сохранения. Все сходится: сорок камушков – двадцать горбиков – сорок раз поднимается поплавок. Правда, есть и другие пакеты, и поплавок еще не раз поднимется... Но согласитесь, что это несколько не портит картину, а лишь обогащает ее.

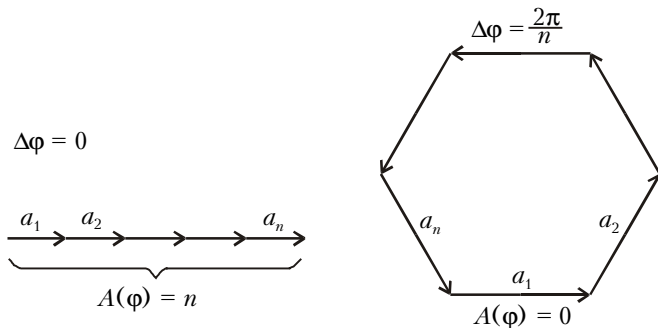


Рис. 9