

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1681» или «Ф1688». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1683, М1687 и М1688 предлагались на осеннем Турнире Городов 1998 года, а задача М1684 — на Московской математической олимпиаде этого года.

Задачи Ф1689 – Ф1693 и Ф1696 предлагались на втором (очном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1681 – М1690, Ф1688 – Ф1697

М1681. Квадрат целого числа оканчивается на ...21. Может ли третья цифра справа быть четной?

В. Сендеров

М1682. Из какой-либо точки плоскости опускаются перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Р. Кудинов

М1683. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

А. Гришин

М1684*. Круг разделен радиусами на $2n$ равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n . В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n . Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n .

В. Произволов

М1685. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведенные через середины

сторон треугольников ABC , BCD , CDA , DAB , имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.

И. Вайнштейн

М1686. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx = \sqrt{2}.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

В. Произволов

М1687. Будем называть *размером* прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

А. Шень

М1688*. Дана функция $f(x) = (x^2 + ax + b) / (x^2 + cx + d)$, где трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны: 1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$;

2) $f(x)$ представима в виде $f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x)\dots)))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_i x + m_i$, x^{-1} , x^2 .

А. Белов

M1689. Арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит не менее трех членов, их произведение – делитель некоторого числа $n^2 + 1$.

а) Докажите, что существует такая прогрессия с разностью 12.

б) Докажите, что такой прогрессии с разностью 10 или 11 не существует.

в)* Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?

В.Сендеров

M1690. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.

В.Произволов

Ф1688. Автомобиль на прямой передаче (на четвертой скорости коробки передач) может на прямом шоссе развивать скорость от 50 км/ч до 140 км/ч. При скорости 70 км/ч расход бензина составляет 7 л на 100 км пробега; КПД двигателя не зависит от скорости. Сопротивление движению пропорционально квадрату скорости автомобиля. Емкость бензобака автомобиля 40 л, других емкостей для топлива в автомобиле нет. Два водителя (чтобы можно было ехать без перерывов) должны перегнать автомобиль на расстояние 2000 км; заправочные станции по пути расположены на расстояниях 200 км или 300 км друг от друга; перегоны разной длины строго чередуются. За какое минимальное время водители смогут проделать весь путь? Какое минимальное количество бензина можно потратить, если ехать помедленнее? Езда на пониженной передаче приводит к увеличению расхода бензина.

С.Варламов

Ф1689. По гладкому горизонтальному столу свободно скользит прямая однородная палочка длиной L . В данный момент скорость одного из концов палочки равна v и составляет угол α с палочкой, а скорость другого конца по величине равна $2v$. Найдите скорость центра палочки и ускорения ее концов.

А.Палочкин

Ф1690. Небольшое тело бросают параллельно поверхности Земли с высоты 1 км. Определите, где находится точка падения тела на Землю, если его скорость на 1% меньше первой космической скорости. Можно считать Землю идеальным шаром, на котором нет атмосферы.

З.Рафаилов

Ф1691. Динамометр состоит из подставки и прикрепленной к ней однородной пружинки втрое меньшей массы. Один крючок динамометра соединен с подставкой, другой – со свободным концом пружинки. Два таких динамометра соединены «последовательно» – сцеплены двумя крючками, а внешние силы приложены к свободным крючкам. Приложим к этим крючкам противоположно направленные силы \vec{F} и \vec{f} – динамометры поедут по гладкой горизонтальной плоскости, вытянувшись вдоль линии действия сил. Считая, что пружинки не касаются

витками оснований динамометров, определите показания приборов.

С.Варлберман

Ф1692. Поверхность планеты, имеющей такие же размеры, массу и состав атмосферы, как Земля, была полностью покрыта океаном с одинаковыми повсюду глубиной 230 м и температурой $+10^\circ\text{C}$. В результате внутренних процессов температура поднялась повсюду до $+100^\circ\text{C}$, однако глубина океана осталась прежней. Считая, что размеры твердой части планеты совершенно не изменились при нагревании, определите средний коэффициент объемного расширения воды в указанном диапазоне температур.

С.Варламов

Ф1693. Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В, ток при этом составляет 0,2 А. В нашем распоряжении имеются мощный источник напряжением 6 В и реостат на 10 Ом (у реостата сделаны выводы от краев обмотки и от движка, который может контактировать с любым витком – такой прибор часто называют потенциометром). Как присоединить лампочку к источнику, чтобы она горела нормально? Где должен находиться движок реостата?

М.Учителев

Ф1694. В компьютерной модели атома водорода все размеры и заряды частиц увеличили в N раз. Считая, что плотность «вещества» частиц в модели сохранена, определите, во сколько раз изменится период обращения «электрона» вокруг ядра. И еще: известно, что в атоме Резерфорда электрон излучает электромагнитные волны и, теряя энергию, должен упасть на ядро через малое время τ . Оцените время падения «электрона» на ядро в увеличенной модели.

А.Зильберман

Ф1695. В схеме на рисунке 1 конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0 . Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T ?

А.Теплов

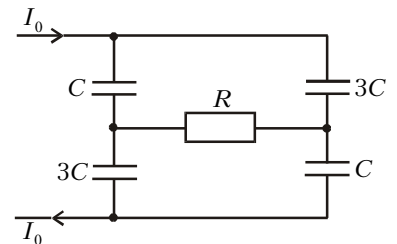


Рис. 1

Ф1696. Цепь из двух конденсаторов емкостью по 10 мкФ и двух резисторов сопротивлением по 1 кОм (рис.2) подсоединена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр, включенный между точками А и В? А если вместо вольтметра подключить амперметр – какой ток он покажет? А если включить в цепь ваттметр, подсоединив высокоомную его обмотку (обмотку напряжения) непосредственно к источнику, а низкоомную (токовую) к точкам А и В, – что он покажет?

З.Рафаилов

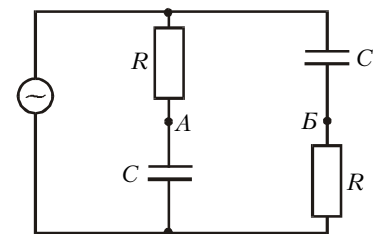


Рис. 2

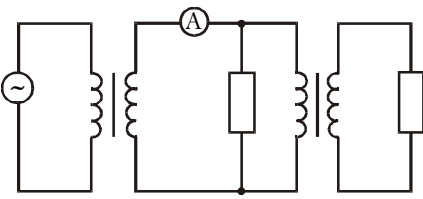


Рис.3

Ф1697. Каждый из двух одинаковых трансформаторов имеет две многовитковые обмотки, в одной из которых витков вдвое больше, чем в другой.

Трансформаторы соединены между собой так, как показано на рисунке 3 (никаких дополнительных подробностей нет!), и подключены к сети переменного напряжения 220 В. Что может показывать в этой схеме амперметр? Сердечники трансформаторов сделаны из материала с очень большой магнитной проницаемостью, потерь энергии в трансформаторах нет. Сопротивления резисторов – по 1 кОм каждое.

Р.Александров

Поправка. В условии задачи Ф1683, опубликованном в предыдущем номере журнала, должна быть задана высота вала H над поверхностью воды. Редакция приносит читателям свои извинения.