Ловушка для треугольника

В.ДУБРОВСКИЙ, В.СЕНДЕРОВ

Много лет назад на приемном экзамене на физфак МГУ предлагалась следующая задача:

Упражнение 1. Медианы прямоугольного треугольника пересекаются на его вписанной окружности. Найдите углы этого треугольника.

Есть и другие задачи о треугольниках, в которых центроид (точка пересечения медиан) лежит на вписанной окружности. Например, треугольник, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части, фигурировал в задаче М1224 «Задачника «Кванта».

А как расположен относительно вписанной окружности ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника? Если треугольник правильный, то его ортоцентр находится в центре вписанной окружности. Ортоцентр неостроугольного треугольника, очевидно, лежит вне ее. Отсюда понятно, что, деформируя любой такой треугольник в правильный, мы обязательно пройдем через положение, в котором ортоцентр лежит точно на вписанной окружности.

А можно ли «посадить» на вписанную окружность сразу обе эти замечательные точки? Этот вопрос оказывается довольно сложным. Мы покажем, что ответ на него утвердительный:

треугольник, у которого и центроид, и ортоцентр лежат на вписанной окружности, существует.

Доказательство этого факта требует привлечения богатого арсенала методов и фактов геометрии треугольника, которые пригодятся читателям и при решении других задач.

Нам придется иметь дело с многочисленными соотношениями в треугольнике. Напомним стандартные обозначения его элементов (рис.1): стороны треугольника ABC обозначаются a $(= BC)$, b, c; центры вписанной и описанной окружностей – I и O, а их радиусы, соответственно, – r и R; ортоцентр (точка пересечения высот) – H, центроид (точка пересечения медиан) – G.

В искомом треугольнике должно выполняться равенство $IG = IH = r$. Прежде чем заняться анализом этих

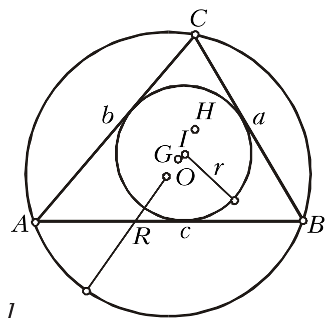

Рис. 1

уравнений, сделаем несколько полезных для дальнейшего «заготовок».

Замечательная формула для «замечательных расстояний»

Начнем с формулы, которая позволит нам выражать расстояния между различными «замечательными точками» треугольника ABC через другие его элементы.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки P и произвольных чисел x, y, z

$$\left|x\,\vec{PA}+y\,\vec{PB}+z\,\vec{PC}\right|^2 = s\cdot\left(xPA^2+yPB^2+zPC^2\right) - \left(xyc^2+yza^2+zxb^2\right), \quad (1)$$

где $s = x + y + z$ (рис.2).

Как известно из физики, при $s = x + y + z = 1$ точка D, определяемая равенством $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}$, есть центр масс системы трех масс x, y, z, помещенных в точки A, B, C, и формула (1) дает квадрат расстояния от точки P до D. В частности, при $x = y = z = 1/3$ точка D есть центроид G треугольника:

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}\left(\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}\right), \quad (2)$$

а само равенство (1) принимает вид *формулы Лейбница*

$$PG^2 = \left(PA^2+PB^2+PC^2\right)/3 - \left(a^2+b^2+c^2\right)/9$$

для квадрата расстояния от произвольной точки P до G.

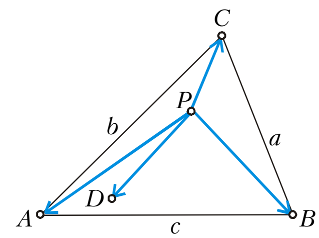

Рис. 2

Если $P = O$ – центр описанной окружности треугольника ABC, то (1) дает

$$OM^2 = s^2R^2 - \left(xyc^2+yza^2+zxb^2\right), \quad (3)$$

где $\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

Приведем еще два интересных частных случая формулы (1).

Упражнение 3. Докажите, что

а) если точка D лежит на стороне AB треугольника PAB (рис.3) и делит ее в

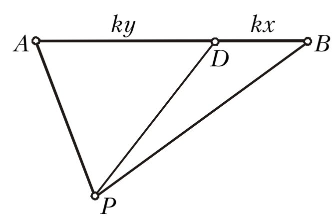

Рис. 3

отношении $AD : DB = y : x$, где $x + y = 1$, то

$$PD^2 = xPA^2 + yPB^2 - xyAB^2$$

(формула Стюарта);

б) расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника можно найти по формуле

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Многочлен треугольника

Один из способов доказать существование треугольника, удовлетворяющего тем или иным условиям, – составить, исходя из этих условий, уравнение

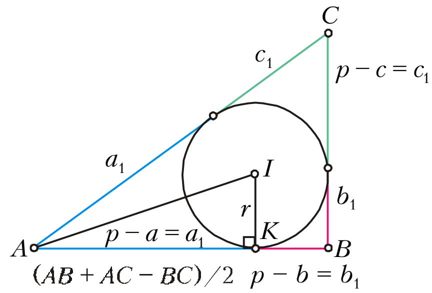

Рис. 4

$F(x) = 0$, корнями которого являются длины a, b, c его сторон, и доказать, что оно имеет три положительных решения, причем эти решения должны удовлетворять «неравенствам треугольника» для сторон ($a < b + c$ и т.д.). Часто удобнее иметь дело не с самими сторонами, а с отрезками, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности. Любые два таких отрезка, выходящих из одной вершины, равны по теореме о касательных; обозначим их a_1 (для отрезков, выходящих из A), b_1 и c_1 (рис.4).

Упражнение 4. Покажите, что а) $a_1 = (b+c-a)/2 = p-a$, $b_1 = p-b$ и $c_1 = p-c$; б) треугольник с заданными величинами a_1, b_1 и c_1 существует (и однозначно определен) при *любых* положительных значениях этих величин.

Таким образом, перейдя от сторон к отрезкам a_1, b_1, c_1, мы избавляемся от необходимости заботиться о неравенстве треугольника.

Итак, рассмотрим кубический многочлен $F_1(x)$ с корнями a_1, b_1, c_1:

$$F_1(x) = (x-a_1)(x-b_1)(x-c_1) =$$

$$= x^3 - (a_1+b_1+c_1)x^2 +$$

$$+ (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)x - a_1b_1c_1 .$$

Выразим его коэффициенты через радиусы R, r и периметр $2p$ треугольника. Очевидно, $a_1 + b_1 + c_1 = 3p - (a+b+c) = p$. Пользуясь формулой Герона и формулой $S = rp$ для площади треугольника, вычислим свободный член:

$$a_1b_1c_1 =$$

$$=(p-a)(p-b)(p-c) = S^2/p = r^2p .$$

Наконец, коэффициент при x можно найти, вычислив $F_1(p)$:

$$F_1(p) = (p-a_1)(p-b_1)(p-c_1) = abc =$$

$$=p^3 - p\cdot p^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)p - r^2p.$$

Из формул $S = pr$ и $S = \dfrac{abc}{4R}$ получаем

$$abc = 4Rrp, \qquad (4)$$

откуда

$$a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = r^2 + 4Rr,$$

и «уравнение треугольника» принимает вид

$$F_1(x) = x^3 - px^2 +$$

$$+ (r^2 + 4Rr)x - r^2p = 0 . \qquad (5)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого уравнения в нашей задаче и доказать его разрешимость.

Упражнение 5. Проведите аналогичное рассуждение для многочлена $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$. Докажите, что $F(x) = x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp$.

В алгебре коэффициенты многочлена $F(x)$ – выражения $a+b+c$, $ab + bc + ca$ и abc – называют *элементарными симметрическими* (т.е. не меняющимися при перестановке переменных) *многочленами* от трех переменных (a, b и c). Через них можно выразить любой симметрический многочлен от a, b, c. Поэтому любую величину в треугольнике, имеющую геометрический смысл (т.е. одинаковую для равных треугольников, а значит, не меняющуюся при перестановке сторон) и выражаемую многочленом от длин сторон, можно записать через радиусы вписанной и описанной окружностей и периметр. Ниже мы встретимся с несколькими такими выражениями.

Упражнение 6. Для треугольника ABC докажите, что

а) $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$;

б) $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$;

в) $ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a = 2p\left(r^2 - 2Rr + p^2\right)$.

Условие на центроид

Обратимся непосредственно к треугольнику, который рассматривается в нашей задаче. Выразим с помощью формулы Лейбница расстояние IG от центра I вписанной окружности до центроида G. Расстояние IA найдем из прямоугольного треугольника AIK (см. рис.4), где K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB. Поскольку $AK = a_1 = p - a$ (см. упражнение 4), то $IA^2 = a_1^2 + r^2$. Аналогично выражаются величины IB^2 и IC^2. Поэтому (см. упражнение 6)

$$IG^2 = \left(a_1^2 + r^2 + b_1^2 + r^2 + c_1^2 + r^2\right)/3 -$$

$$- \left(a^2 + b^2 + c^2\right)/9 = \left(p^2 - 16Rr + 5r^2\right)/9 .$$

Значит, *центроид треугольника лежит на вписанной окружности* ($IG = r$) тогда и только тогда, когда

$$p^2 = 16Rr + 4r^2 . \qquad (6)$$

Заметим, что при этом условии «уравнение треугольника» (5) упрощается:

$$x^3 - px^2 + \left(p^2/4\right)x - r^2p = 0 ,$$

а после замены $x = pu/2$ становится совсем «хорошим»:

$$u(u-1)^2 = 8(r/p)^2 . \qquad (5')$$

Условие на ортоцентр

Мы хотим найти треугольник, в котором и *ортоцентр лежит на вписанной окружности*, т.е. $IH = IG = r$. В задачах, где идет речь одновременно о центроиде и ортоцентре, почти неизбежно на арене появляется еще одна замечательная точка треугольника – центр описанной окружности O. Наша задача – не исключение.

Упражнение 7. Докажите, что в любом треугольнике

а) $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$;

б) $\vec{OI} = \dfrac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a+b+c}$, иначе говоря, центр I вписанной окружности есть центр масс системы масс a, b, c, помещенных в вершинах A, B, C соответственно;

в) $\vec{IH} = \left(1 - \dfrac{a}{2p}\right)\vec{OA} + \left(1 - \dfrac{b}{2p}\right)\vec{OB} + \left(1 - \dfrac{c}{2p}\right)\vec{OC}$.

Упражнение 8. Покажите, что в любом треугольнике

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 . \qquad (7)$$

Подставим в равенство (7) $IH = r$, выразим из него p^2 и приравняем это выражение к правой части (6):

$$p^2 = 4R^2 + 4Rr + 2r^2 = 16Rr + 4r^2 .$$

Отсюда получаем важное соотношение между радиусами вписанной и описанной окружностей искомого треугольника:

$$r^2 + 6Rr - 2R^2 = 0 . \qquad (8)$$

Малость, которой хватает

Возьмем для определенности $R = 1$, тогда из последнего уравнения получим $r = \sqrt{11} - 3$ (второй корень уравнения (8) отрицательный), а из предпоследнего – $p^2 = 8\left(4 - \sqrt{11}\right)$. Подставим величину $8\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{11}-3\right)^2}{4-\sqrt{11}} = 2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5$ в «уравнение треугольника» (5′):

$$u(u-1)^2 = 2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5.$$

Нам остается доказать, что это уравнение имеет три положительных корня. На рисунке 5 показан график левой

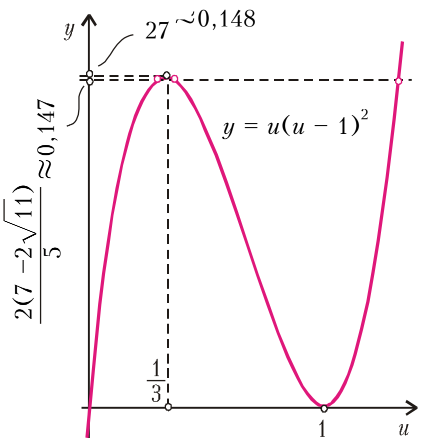

Рис. 5

части этого уравнения. Ее значение в точке $1/3$ (являющееся ее наибольшим значением на отрезке $[0, 1]$, что сейчас для нас не существенно) равно $4/27$ и больше $2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5$ (проверьте!), причем разница между этими величинами едва превышает одну тысячную.

Отсюда, очевидно, следует, что наше «уравнение треугольника» действительно имеет три положительных решения, а значит, искомый треугольник существует. Более того, его стороны, с точностью до пропорциональности, определены однозначно, а значит, все треугольники, удовлетворяющие нашему условию, подобны. Стоит сказать, что циркулем и линейкой этот треугольник не строится.

Геометрия вместо алгебры

Идея приведенного выше вычислительного решения предельно проста: «записать условия в виде уравнений и посчитать», хотя сами вычисления достаточно хитроумны. Но, как это часто бывает, наша задача имеет и более изысканное «геометрическое» решение, использующее несколько классических теорем о треугольнике. С этих теорем мы и начнем изложение второго решения.

Упражнение 9 (прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике центроид G лежит на отрезке OH между центром описанной окружности и ортоцентром и делит его в отношении $OG : GH = 1 : 2$ (рис.6). Прямая OH (при $O \ne H$) называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

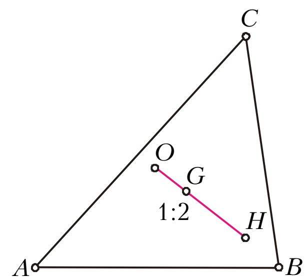

Рис. 6

Упражнение 10 (формула Эйлера). Докажите, что расстояние $d = OI$ между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Таким образом, две окружности могут служить вписанной и описанной окружностями некоторого треугольника лишь в том случае, когда их радиусы связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера. (В частности, отсюда видно, что в любом треугольнике $R \ge 2r$.)

Верно и обратное. Более того, если расстояние между центрами двух окружностей связано с их радиусами формулой $d^2 = R^2 - 2Rr$, то исходя из любой точки A на окружности радиуса

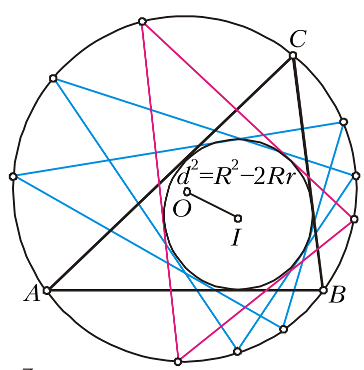

Рис. 7

R можно построить треугольник ABC, вписанный в эту окружность и описанный около второй окружности (рис.7).

Упражнение 11. Докажите последнее утверждение.

Сформулируем теперь одну из самых красивых теорем планиметрии – *теорему Фейербаха.* Она касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника, а также, что является отдельной теоремой, через основания его высот и середины отрезков от ортоцентра до вершин (рис.8; эту окружность называют *окружностью девяти точек*). Ее можно представить как образ описанной окружности при гомотетии относительно центроида G с коэффициентом $-1/2$ или относительно ортоцентра с коэффициентом $1/2$. В любом случае получим, что центр F окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точнее, в середине отрезка OH, а ее радиус равен $R/2$. Теорема Фейербаха утверждает, что *окружность 9 точек касается вписанной окружности треугольника и трех его вневписанных окружностей*. В частности, это означает, что $IF = R/2 - r$; именно это равенство нам и понадобится.

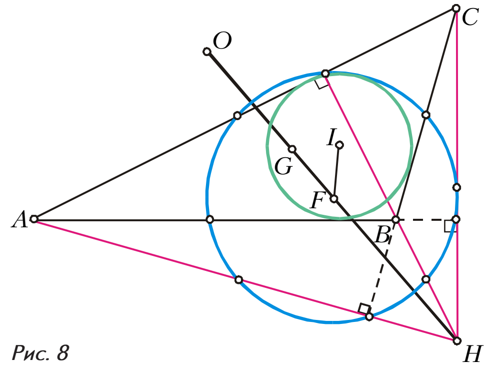

Рис. 8

Упражнение 12. Докажите, что

$$\vec{IF} = \frac{1}{2p}\left((p-a)\vec{OA} + (p-b)\vec{OB} + (p-c)\vec{OC}\right),$$

и выведите отсюда равенство $IF^2 = (R/2 - r)^2$.

Последнее свойство, которое мы хотим напомнить, хорошо известно:

Упражнение 13. Если на плоскости даны окружность и точка P, то для любой прямой, проходящей через P и пересекающей окружность, произведение $PA \cdot PB$, где A и B – точки пересечения прямой с окружностью, будет одним и тем же; оно равно $\left|d^2 - R^2\right|$, где d – расстояние от точки P до центра окружности, а R – радиус окружности.

В учебниках эту теорему обычно формулируют в виде двух утверждений – для точки внутри и вне окружности; величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки P относительно данной окружности.

Теперь, наконец, мы можем вплотную заняться нашим треугольником.

Проведем в нем прямую Эйлера OH. Допустим, что точка H уже попала на вписанную окружность, и выведем условие, при котором и точка G окажется на ней (рис.9).

Пусть K – вторая точка пересечения прямой OH с вписанной окружностью.

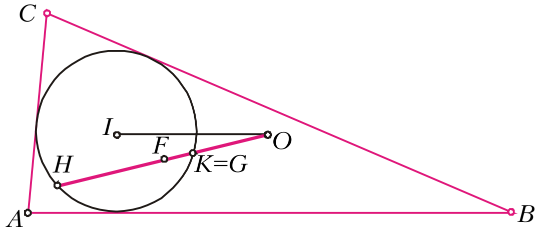

Рис. 9

Обозначим $OH = l$, $OK = kl$, где k – числовой множитель. Тогда степень точки O относительно вписанной окружности равна $OK \cdot OH = kl^2$, а с другой стороны, в силу упражнения 13 и формулы Эйлера, она равна $OI^2 - r^2 = R^2 - 2Rr - r^2$. Аналогично, степень точки F относительно вписанной окружности равна

$$FH \cdot FK = (l/2) \cdot |1/2 - k| l =$$

$$= |1 - 2k| \cdot (l/2)^2 = r^2 - IF^2 =$$

$$= r^2 - (R/2 - r)^2 = -R^2/4 + Rr.$$

В искомом треугольнике точка $K = G$ – центроид и $k = 1/3$. Это дает равенство $l^2/3 = R^2 - 2Rr - r^2 == 4\left(-R^2/4 + Rr\right)$, из которого сразу получается уже знакомое нам уравнение (8). Обратно, если радиусы R и r удовлетворяют этому уравнению и известно, что ортоцентр лежит на вписанной окружности, то для множителя k точно таким же способом получим уравнение $k = |2k - 1|$, имеющее два решения: $k = 1/3$ и $k = 1$. В первом случае $OK = (1/3)OH$, т.е. $K = G$ – центроид G лежит на вписанной окружности.

Упражнение 14. Покажите, что случай $k = 1$ невозможен.

Итак, нарисуем окружности Ω и ω радиусов R и $r = \left(\sqrt{11} - 3\right)R$ с центрами в точках O и I на расстоянии $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = R\sqrt{7 - 2\sqrt{11}}$. Как уже было сказано, для любой точки A на окружности Ω можно построить треугольник ABC, вписанный в Ω и описанный около ω. Пусть A пробегает окружность Ω, тогда ортоцентр H треугольника ABC, очевидно, опишет некоторую замкнутую непрерывную линию. Нам достаточно показать, что он побывает и внутри, и снаружи вписанной окружности ω. Тогда его траектория непременно должна пересечь ω, т.е. при некотором положении точки A ортоцентр H треугольника ABC попадает на ω; выше мы доказали, что в силу заданного соотношения между R и r соответствующий треугольник и будет искомым.

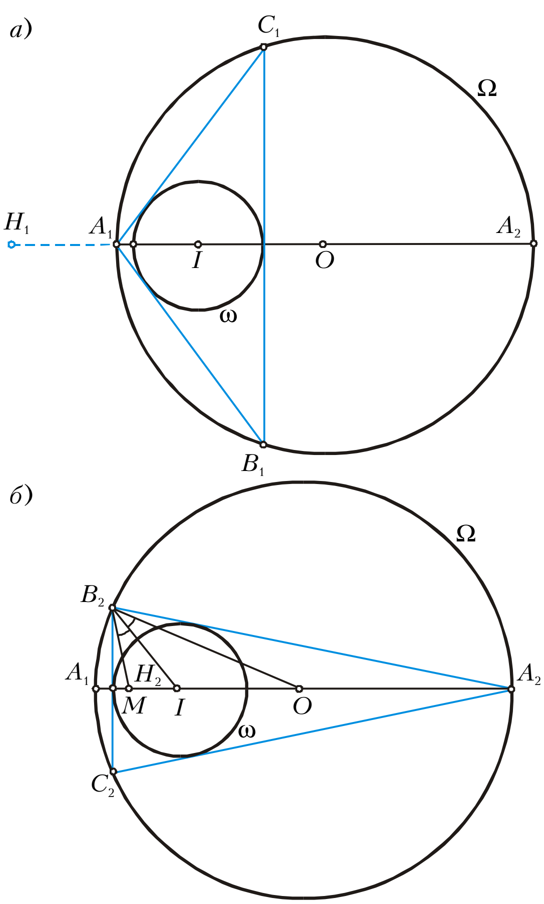

Рис. 10

Проведем в окружности Ω диаметр A_1A_2 через I (рис.10) и рассмотрим равнобедренные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, отвечающие его концам. Треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис.10,*а*) тупоугольный, так как O – центр его описанной окружности – лежит вне этого треугольника. (Действительно, достаточно убедиться, что $IO = d > r$, или $d^2 = R^2 - 2Rr > r^2$. После подстановки численных значений это неравенство принимает вид $7 - 2\sqrt{11} > \left(\sqrt{11} - 3\right)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 176 > 169$.) Следовательно, ортоцентр H_1 этого треугольника лежит вне его – на продолжении радиуса OA_1, т.е. не только вне ω, но и вне Ω. Второй треугольник, $A_2B_2C_2$, остроугольный (он содержит O), и его ортоцентр H_2 лежит на его высоте A_2M. Установить, что он находится внутри вписанной окружности, точнее на ее радиусе IM, можно, сославшись на то, что *в любом треугольнике биссектриса любого угла делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины, что и биссектриса* (на рисунке 10,*б*, например, $\angle H_2B_2I = \angle IB_2O$); в нашем случае отсюда следует, что точки O и H_2 лежат по разные стороны от I.

Упражнение 15. Докажите выделенное курсивом утверждение о биссектрисе.

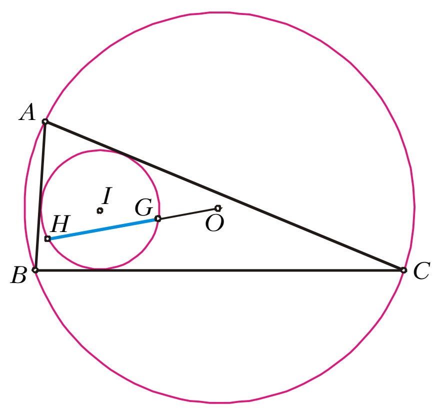

Рис. 11

Этим завершается второе решение нашей задачи. Искомый треугольник изображен на рисунке 11.

Задачи «на закрепление»...

Упражнение 16. Покажите, что каждое из условий а) $2R + r = p$ и б) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы треугольник был прямоугольным. В случае остроугольного треугольника знак «=» в обоих соотношениях нужно заменить на «<», а в случае тупоугольного – на «>».

Упражнение 17 (М1487). Пусть H – точка пересечения высот, O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH, IH, OI наибольший – OH.

...и для исследования

Интересно выяснить, хотя для решения задачи это само по себе и не нужно, какую именно траекторию описывает ортоцентр треугольника ABC, «зажатого» между данными окружностями ω и Ω. Ответ оказывается неожиданно простым – окружность! Для доказательства возьмем на луче OI точку J так, что $OJ = 2OI$ (рис.12). Тогда IF – средняя линия треугольника OJH, следовательно, $JH = 2IF = R - 2r$. Диаметром этой окружности, очевидно, будет отрезок H_1H_2, соединяющий ортоцентры рассмотренных выше равнобедрен-

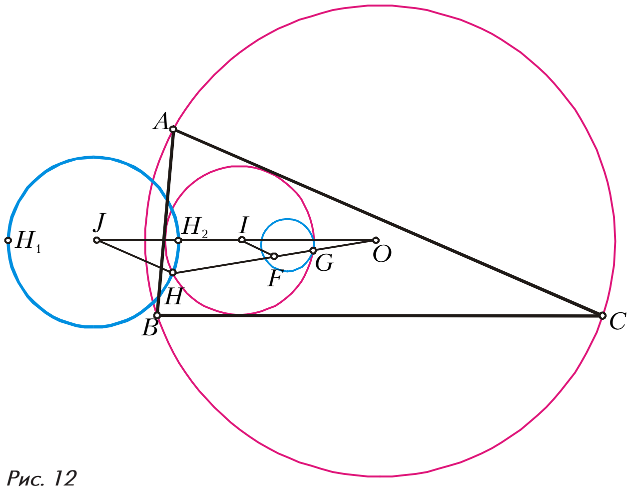

Рис. 12

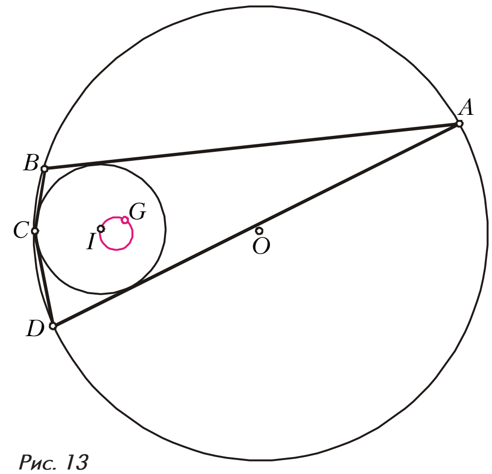

Рис. 13

ных треугольников. Из соображений непрерывности ясно, что когда A пробегает описанную окружность, H пройдет всю указанную окружность, причем за один оборот точки A точка H совершит три полных оборота.

Заметим, что по теореме о прямой Эйлера (упражнение 9) центроид G нашего треугольника также описывает окружность; ее радиус равен $(R - 2r)/3$, а центр делит отрезок IO в отношении 1:2. В связи с этим возникает следующая задача.

Рассмотрим две окружности ω и Ω, первая из которых лежит внутри второй. Допустим, что существует *четырехугольник*, вписанный в Ω и описанный около ω. Можно доказать, что тогда, как и в случае треугольника, такой четырехугольник можно нарисовать, взяв за одну из его вершин *любую* точку окружности Ω; это утверждение называется *теоремой Понселе* (для четырехугольника). **Верно ли, что множество центроидов всех этих четырехугольников тоже окружность?** (Центроид четырехугольника – это центр масс четырех материальных точек, сосредоточенных в его вершинах; он находится на пересечении средних линий четырехугольника.) Эксперимент дает утвердительный ответ на этот вопрос (рис.13), но к моменту написания этой статьи доказательством мы не располагали.

Теорема Понселе справедлива и для многоугольников с произвольным числом сторон n. **Будет ли центроид «многоугольника Понселе» описывать окружность при любом n?**