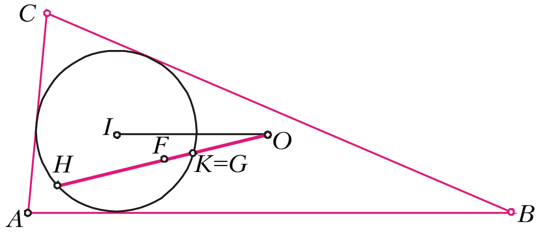

Рис. 9

Обозначим $OH = l$, $OK = kl$, где k – числовой множитель. Тогда степень точки O относительно вписанной окружности равна $OK \cdot OH = kl^2$, а с другой стороны, в силу упражнения 13 и формулы Эйлера, она равна $OI^2 - r^2 = R^2 - 2Rr - r^2$. Аналогично, степень точки F относительно вписанной окружности равна

$$FH \cdot FK = (l/2) \cdot |1/2 - k| l =$$

$$= |1 - 2k| \cdot (l/2)^2 = r^2 - IF^2 =$$

$$= r^2 - (R/2 - r)^2 = -R^2/4 + Rr.$$

В искомом треугольнике точка $K = G$ – центроид и $k = 1/3$. Это дает равенство $l^2/3 = R^2 - 2Rr - r^2 = 4\left(-R^2/4 + Rr\right)$, из которого сразу получается уже знакомое нам уравнение (8). Обратно, если радиусы R и r удовлетворяют этому уравнению и известно, что ортоцентр лежит на вписанной окружности, то для множителя k точно таким же способом получим уравнение $k = |2k - 1|$, имеющее два решения: $k = 1/3$ и $k = 1$. В первом случае $OK = (1/3)OH$, т.е. $K = G$ – центроид G лежит на вписанной окружности.

Упражнение 14. Покажите, что случай $k = 1$ невозможен.

Итак, нарисуем окружности Ω и ω радиусов R и $r = \left(\sqrt{11} - 3\right)R$ с центрами в точках O и I на расстоянии $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = R\sqrt{7 - 2\sqrt{11}}$. Как уже было сказано, для любой точки A на окружности Ω можно построить треугольник ABC, вписанный в Ω и описанный около ω. Пусть A пробегает окружность Ω, тогда ортоцентр H треугольника ABC, очевидно, опишет некоторую замкнутую непрерывную линию. Нам достаточно показать, что он побывает и внутри, и снаружи вписанной окружности ω. Тогда его траектория непременно должна пересечь ω, т.е. при некотором положении точки A ортоцентр H треугольника ABC попадает на ω; выше мы доказали, что в силу заданного соотношения между R и r соответствующий треугольник и будет искомым.

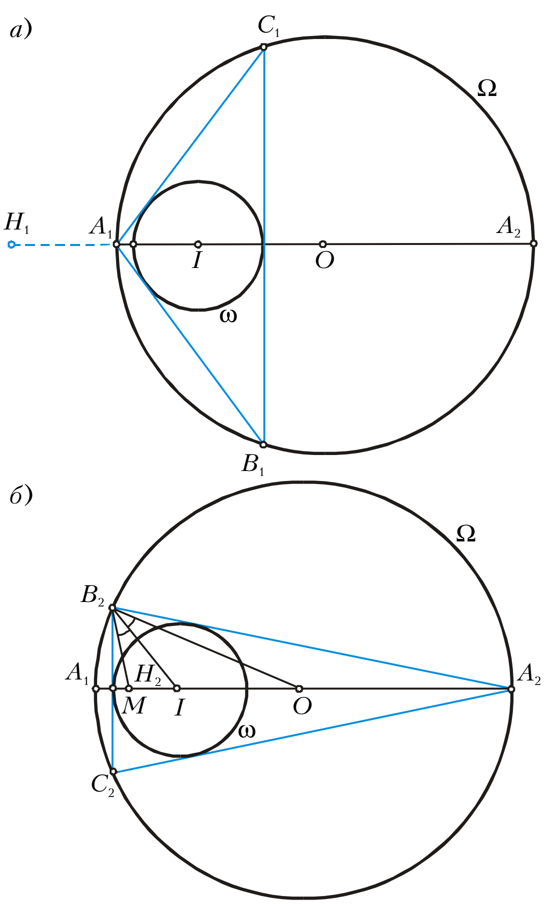

Рис. 10

Проведем в окружности Ω диаметр A_1A_2 через I (рис.10) и рассмотрим равнобедренные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, отвечающие его концам. Треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис.10,*а*) тупоугольный, так как O – центр его описанной окружности – лежит вне этого треугольника. (Действительно, достаточно убедиться, что $IO = d > r$, или $d^2 = R^2 - 2Rr > r^2$. После подстановки численных значений это неравенство принимает вид $7 - 2\sqrt{11} > \left(\sqrt{11} - 3\right)^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 176 > 169$.) Следовательно, ортоцентр H_1 этого треугольника лежит вне его – на продолжении радиуса OA_1, т.е. не только вне ω, но и вне Ω. Второй треугольник, $A_2B_2C_2$, остроугольный (он содержит O), и его ортоцентр H_2 лежит на его высоте A_2M. Установить, что он находится внутри вписанной окружности, точнее на ее радиусе IM, можно, сославшись на то, что *в любом треугольнике биссектриса любого угла делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины, что и биссектриса* (на рисунке 10,*б*, например, $\angle H_2B_2I = \angle IB_2O$); в нашем случае отсюда следует, что точки O и H_2 лежат по разные стороны от I.

Упражнение 15. Докажите выделенное курсивом утверждение о биссектрисе.

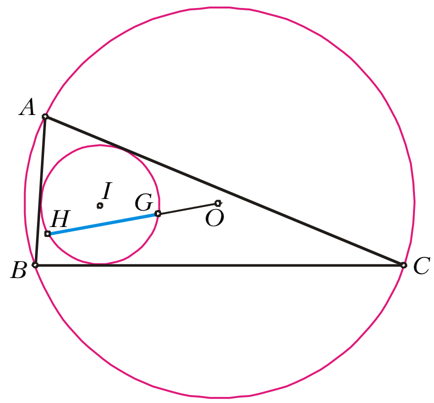

Рис. 11

Этим завершается второе решение нашей задачи. Искомый треугольник изображен на рисунке 11.

Задачи «на закрепление»...

Упражнение 16. Покажите, что каждое из условий а) $2R + r = p$ и б) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы треугольник был прямоугольным. В случае остроугольного треугольника знак «=» в обоих соотношениях нужно заменить на «<», а в случае тупоугольного – на «>».

Упражнение 17 (M1487). Пусть H – точка пересечения высот, O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH, IH, OI наибольший – OH.

...и для исследования

Интересно выяснить, хотя для решения задачи это само по себе и не нужно, какую именно траекторию описывает ортоцентр треугольника ABC, «зажатого» между данными окружностями ω и Ω. Ответ оказывается неожиданно простым – окружность! Для доказательства возьмем на луче OI точку J так, что $OJ = 2OI$ (рис.12). Тогда IF – средняя линия треугольника OJH, следовательно, $JH = 2IF = R - 2r$. Диаметром этой окружности, очевидно, будет отрезок H_1H_2, соединяющий ортоцентры рассмотренных выше равнобедрен-