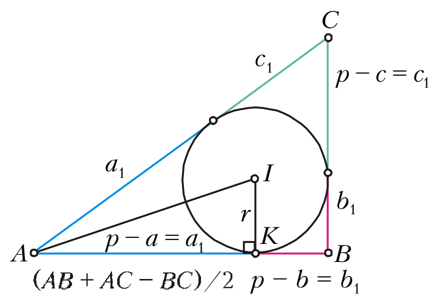

Рис. 4

$F(x)=0$, корнями которого являются длины a, b, c его сторон, и доказать, что оно имеет три положительных решения, причем эти решения должны удовлетворять «неравенствам треугольника» для сторон ($a<b+c$ и т.д.). Часто удобнее иметь дело не с самими сторонами, а с отрезками, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности. Любые два таких отрезка, выходящих из одной вершины, равны по теореме о касательных; обозначим их a_1 (для отрезков, выходящих из A), b_1 и c_1 (рис.4).

Упражнение 4. Покажите, что а) $a_1=(b+c-a)/2=p-a$, $b_1=p-b$ и $c_1=p-c$; б) треугольник с заданными величинами a_1, b_1 и c_1 существует (и однозначно определен) при *любых* положительных значениях этих величин.

Таким образом, перейдя от сторон к отрезкам a_1, b_1, c_1, мы избавляемся от необходимости заботиться о неравенстве треугольника.

Итак, рассмотрим кубический многочлен $F_1(x)$ с корнями a_1, b_1, c_1:

$$F_1(x)=(x-a_1)(x-b_1)(x-c_1)=$$
$$=x^3-(a_1+b_1+c_1)x^2+$$
$$+(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)x-a_1b_1c_1.$$

Выразим его коэффициенты через радиусы R, r и периметр $2p$ треугольника. Очевидно, $a_1+b_1+c_1=3p-(a+b+c)=p$. Пользуясь формулой Герона и формулой $S=rp$ для площади треугольника, вычислим свободный член:

$$a_1b_1c_1=$$
$$=(p-a)(p-b)(p-c)=S^2/p=r^2p.$$

Наконец, коэффициент при x можно найти, вычислив $F_1(p)$:

$$F_1(p)=(p-a_1)(p-b_1)(p-c_1)=abc=$$
$$=p^3-p\cdot p^2+(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)p-r^2p.$$

Из формул $S=pr$ и $S=\dfrac{abc}{4R}$ получаем

$$abc=4Rrp, \qquad (4)$$

откуда

$$a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1=r^2+4Rr,$$

и «уравнение треугольника» принимает вид

$$F_1(x)=x^3-px^2+$$
$$+(r^2+4Rr)x-r^2p=0. \quad (5)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого уравнения в нашей задаче и доказать его разрешимость.

Упражнение 5. Проведите аналогичное рассуждение для многочлена $F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$. Докажите, что $F(x)=x^3-2px^2+(r^2+4Rr+p^2)x-4Rrp$.

В алгебре коэффициенты многочлена $F(x)$ – выражения $a+b+c$, $ab+bc+ca$ и abc – называют *элементарными симметрическими* (т.е. не меняющимися при перестановке переменных) *многочленами* от трех переменных (a, b и c). Через них можно выразить любой симметрический многочлен от a, b, c. Поэтому любую величину в треугольнике, имеющую геометрический смысл (т.е. одинаковую для равных треугольников, а значит, не меняющуюся при перестановке сторон) и выражаемую многочленом от длин сторон, можно записать через радиусы вписанной и описанной окружностей и периметр. Ниже мы встретимся с несколькими такими выражениями.

Упражнение 6. Для треугольника ABC докажите, что

а) $a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2$;

б) $a_1^2+b_1^2+c_1^2=p^2-8Rr-2r^2=a^2+b^2+c^2-p^2$;

в) $ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a=2p\left(r^2-2Rr+p^2\right)$.

Условие на центроид

Обратимся непосредственно к треугольнику, который рассматривается в нашей задаче. Выразим с помощью формулы Лейбница расстояние IG от центра I вписанной окружности до центроида G. Расстояние IA найдем из прямоугольного треугольника AIK (см. рис.4), где K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB. Поскольку $AK=a_1=p-a$ (см. упражнение 4), то $IA^2=a_1^2+r^2$. Аналогично выражаются величины IB^2 и IC^2. Поэтому (см. упражнение 6)

$$IG^2=\left(a_1^2+r^2+b_1^2+r^2+c_1^2+r^2\right)/3-$$
$$-\left(a^2+b^2+c^2\right)/9=\left(p^2-16Rr+5r^2\right)/9.$$

Значит, *центроид треугольника лежит на вписанной окружности* ($IG=r$) тогда и только тогда, когда

$$p^2=16Rr+4r^2. \qquad (6)$$

Заметим, что при этом условии «уравнение треугольника» (5) упрощается:

$$x^3-px^2+\left(p^2/4\right)x-r^2p=0,$$

а после замены $x=pu/2$ становится совсем «хорошим»:

$$u(u-1)^2=8(r/p)^2. \qquad (5')$$

Условие на ортоцентр

Мы хотим найти треугольник, в котором и *ортоцентр лежит на вписанной окружности*, т.е. $IH=IG=r$. В задачах, где идет речь одновременно о центроиде и ортоцентре, почти неизбежно на арене появляется еще одна замечательная точка треугольника – центр описанной окружности O. Наша задача – не исключение.

Упражнение 7. Докажите, что в любом треугольнике

а) $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$;

б) $\vec{OI}=\dfrac{a\vec{OA}+b\vec{OB}+c\vec{OC}}{a+b+c}$, иначе говоря, центр I вписанной окружности есть центр масс системы масс a, b, c, помещенных в вершинах A, B, C соответственно;

в) $\vec{IH}=\left(1-\dfrac{a}{2p}\right)\vec{OA}+\left(1-\dfrac{b}{2p}\right)\vec{OB}+\left(1-\dfrac{c}{2p}\right)\vec{OC}$.

Упражнение 8. Покажите, что в любом треугольнике

$$IH^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2. \qquad (7)$$

Подставим в равенство (7) $IH=r$, выразим из него p^2 и приравняем это выражение к правой части (6):

$$p^2=4R^2+4Rr+2r^2=16Rr+4r^2.$$

Отсюда получаем важное соотношение между радиусами вписанной и описанной окружностей искомого треугольника:

$$r^2+6Rr-2R^2=0. \qquad (8)$$

Малость, которой хватает

Возьмем для определенности $R=1$, тогда из последнего уравнения получим $r=\sqrt{11}-3$ (второй корень уравнения (8) отрицательный), а из предпоследнего – $p^2=8\left(4-\sqrt{11}\right)$. Подста-