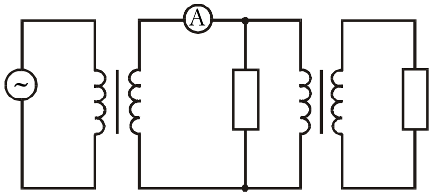


Рис.3

Ф1697. Каждый из двух одинаковых трансформаторов имеет две многовитковые обмотки, в одной из которых витков вдвое больше, чем в другой. Трансформаторы соединены между собой так, как показано на рисунке 3 (никаких дополнительных подробностей нет!), и подключены к сети переменного напряжения 220 В. Что может показывать в этой схеме амперметр? Сердечники трансформаторов сделаны из материала с очень большой магнитной проницаемостью, потерь энергии в трансформаторах нет. Сопротивления резисторов – по 1 кОм каждое.

Р.Александров

Поправка. В условии задачи Ф1683, опубликованном в предыдущем номере журнала, должна быть задана высота вала H над поверхностью воды. Редакция приносит читателям свои извинения.

Решения задач М1661 — М1665, Ф1673 — Ф1682

М1661. *Можно ли отметить 64 единичных кубика в кубе 8×8×8 так, чтобы среди любых 8 отмеченных кубиков некоторые два находились в одном слое, параллельном грани куба, и при этом в каждом слое, параллельном грани, было отмечено 8 кубиков?*

Ответ: да.

Можно считать, что центры кубиков расположены в точках $(x,\ y,\ z)$, $x,\ y,\ z \in \mathbf{Z}$, $0 \le x, y, z \le 7$. Отметим все клетки, центры которых имеют сумму координат, кратную восьми. Нетрудно сообразить, что таких клеток будет ровно 64, по 8 в любом слое, параллельном грани. Допустим, что нам удалось выбрать восемь отмеченных клеток, никакие две из которых не лежат в одном слое, параллельном грани. Тогда сумма координат этих клеток должна быть равна утроенной сумме чисел от 0 до 7. Этого не может быть, поскольку это число не делится на 8.

А.Вершик

М1662. *Может ли куб натурального числа начинаться с 1998?*

Ответ: да, может.

Предположив противное, рассмотрим кубы, большие чем 10^{3n}. Наименьшее из чисел y^3, больших $1998 \cdot 10^{3n}$, не меньше чем $1999 \cdot 10^{3n}$. Обозначим через x^3 наибольший из кубов, меньших чем $1998 \cdot 10^{3n}$; очевидно, $x \ge 10$. Получили:

$$(x+1)^3 - x^3 > 10^{3n}.$$

Но

$$3x^2 + 3x + 1 < 4x^2$$

при $x \ge 10$. Так как

$$x^3 < 2 \cdot 10^{3n+3},$$

то

$$x^2 < 2^{2/3} \cdot 10^{2n+2} < 2 \cdot 10^{2n+2}.$$

Окончательно получим

$$8 \cdot 10^{2n+2} > 10^{3n}$$

– неравенство, неверное при любом $n \ge 3$.

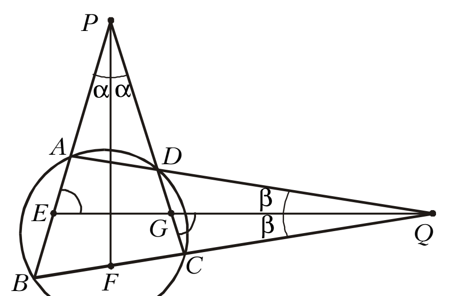
Замечание 1. Подобным же образом доказывается и общее утверждение: любая степень натурального числа может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.

Замечание 2. Фактически мы доказали существование числа $x = \overline{12abc}$ такого, что $x^3 = 1998\ldots$

В действительности таких чисел даже два: $12596^3 = 1998471484736$, а $12597^3 = 1998947500173$. При этом 12596 – наименьшее из всех пятизначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

В.Сендеров

М1663. *Биссектрисы вписанного четырехугольника образуют в пересечении выпуклый четырехугольник. Докажите, что диагонали полученного четырехугольника перпендикулярны.*



Продолжим противоположные стороны исходного четырехугольника $ABCD$ до пересечения в точках P и Q (см. рисунок). Докажем сначала, что биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Поскольку четырехугольник $ABCD$ – вписанный, внешний угол DCQ равен внутреннему углу в противоположной вершине A. Так как прямая QE – биссектриса угла Q, то углы треугольника AQE соответственно равны углам треугольника CQG. Следовательно, $\angle CGQ = \angle AEQ$. Но углы CGQ и PGE равны как вертикальные. Поэтому $\angle PEG = \angle PGE$ и ΔPEG – равнобедренный. Следовательно, биссектриса угла P является серединным перпендикуляром к отрезку EG, т.е. биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Отсюда легко следует утверждение задачи, так как диагонали четырехугольника, образованного на биссектрисах четырехугольника $ABCD$, лежат на биссектрисах PF и QE.

В случае, когда какие-либо две противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, утверждение задачи следует из симметричности чертежа.

С.Берлов

М1664. *Существуют ли отличный от константы многочлен P с целыми коэффициентами и натуральное число $k > 1$ такие, что все числа вида $P\left(k^n\right)$ попарно взаимно просты?*

Ответ: не существуют.

Предположим противное.

В некоторой точке k^m имеем $\left|P\left(k^m\right)\right| > 1$. Это следует из того, что $\left|P(x)\right| \to \infty$ при $x \to \infty$; но можно рассуждать и по-другому.

Именно, пусть r – степень многочлена. Тогда каждое свое