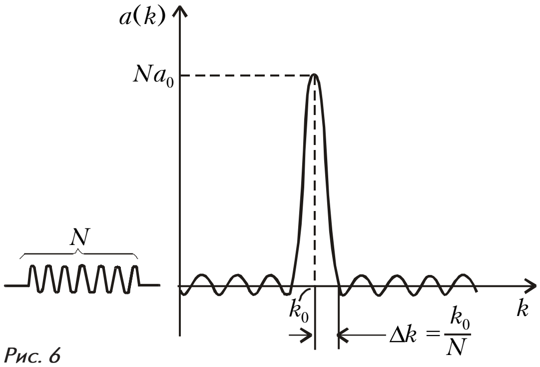

Рис. 6

Коэффициенты $a(k)$ определяют «вес» каждой гармоники в разложении. Для каждого профиля поверхности $h(x)$ их можно определить с помощью интегрирования:

$$a(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos(kx)\,dx.$$

Если вы умете интегрировать, можете проверить сами, если нет – поверьте на слово.

Отметим необычные свойства спектра, которым обладает волновой пакет. Если на поверхности волновой пакет и может затеряться, то в спектре его присутствие видно сразу (рис.6). Волновому пакету с наполняющей, имеющей волновое число k_0, и состоящему из N элементарных волн, соответствует пик при $k = k_0$. Высота пика прямо пропорциональна N, а его полуширина, что особенно важно для нас, равна $\Delta k = k_0/N$. (Проверьте это сами, выбрав любую простую огибающую.)

Теорема Фурье дает нам в руки мощное оружие. Теперь решение любой задачи, в которой речь идет об искажении поверхности воды, мы можем начинать стандартными словами: в результате удара произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Именно так мы и поступим.

Итак, в результате удара камня о воду произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Каждая волна начинает свою собственную жизнь. А жизнь гармонической волны проста – она равномерно движется со своей фазовой скоростью. Поэтому спустя время t гармоника, дававшая в начальное разложение вклад $a(k)\cos(kx)$, будет давать вклад

$$\frac{1}{2}a(k)\cos\big(k(x+vt)\big) + \frac{1}{2}a(k)\cos\big(k(x-vt)\big)$$

– для простоты мы будем говорить лишь об одномерной волне, которая бежит вправо и влево. Для нахождения результирующего профиля следует сложить вклады всех гармоник:

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} a(k)\cos\big(k(x+vt)\big)dk + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} a(k)\cos\big(k(x-vt)\big)dk.$$

Теперь вернемся к нашей задаче о камнях. Будем считать, что мы кинули $n = 40$ камней, бросая их через одинаковые промежутки времени τ. Начало решения нам известно. Первый камень упал, создал бесконечно много волн, волны стали двигаться. Второй камень упал... и т.д. Осталось сложить все гармоники от каждого удара с учетом их сдвигов.

Вместо того чтобы приступать к лобовому штурму, посмотрим на суммарный вклад одинаковых гармоник от разных ударов. Для определенности будем считать, что наблюдение мы проводим слева от места падения камней (рядом с ним), поэтому рассмотрим гармоники, бегущие влево. Их общий вклад сразу после последнего удара равен

$$\frac{1}{2}a(k)\cos kx + \frac{1}{2}a(k)\cos k\big(x + v_{\text{ф}}\tau\big) + \ldots + \frac{1}{2}a(k)\cos k\big(x + (n-1)v_{\text{ф}}\tau\big),$$

или

$$\frac{1}{2}a(k)\big(\cos(kx) + \cos(kx+\varphi) + \ldots + \cos\big(kx + (n-1)\varphi\big)\big),$$

где $\varphi(k) = kv_{\text{ф}}(k)\tau = \sqrt{kg}\,\tau$. Сумма косинусов, стоящая в скобках, хорошо известна – она связана и с дифракционными решетками, и с правильными n-угольниками, и с функцией-«гребенкой», изображенной на рисунке 7,*а*. Но давайте обо всем по порядку.

Как подойти к вычислению такой суммы? Очень просто. Надо от сложения косинусов перейти к более сложной задаче – сложению векторов. Посмотрите на n единичных векторов, изображенных на рисунке 8,*а*. Если мы построим их сумму, то найдем и интересующую нас сумму косинусов – она будет равна проекции суммарного вектора на ось X. Искомая сумма будет снова косинусом, умноженным на длину суммарного вектора $A(\varphi)$:

$$A(\varphi)\cos\left(kx + \frac{n-1}{2}\varphi\right).$$

Амплитуду $A(\varphi)$ можно определить из рисунка 8,*б*, на котором мы изобразили эти же векторы приложенными друг к другу. Вычисление оставляем вам в качестве упражнения, а здесь дадим лишь ответ:

$$A(\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Функция-«гребенка» и есть график

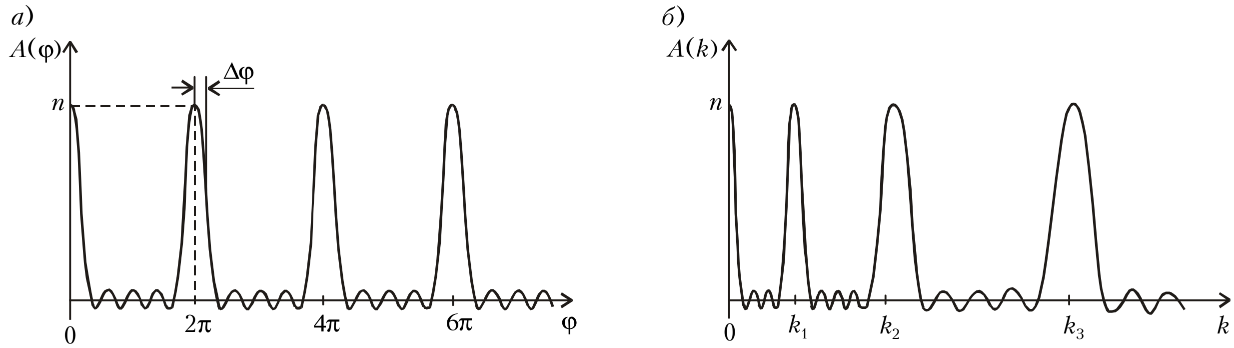

Рис. 7