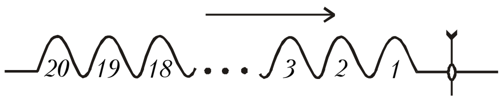

Рис. 1

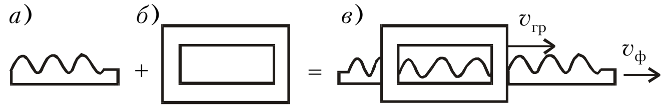

Рис. 2

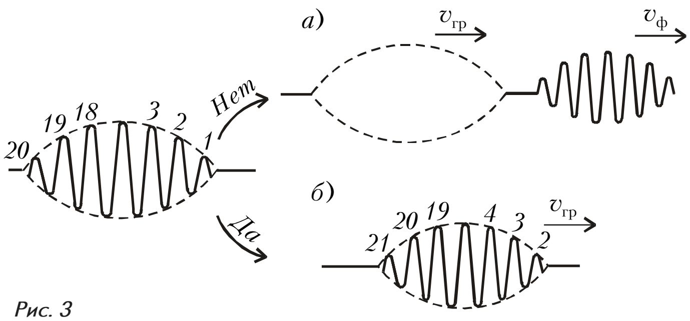

Рис. 3

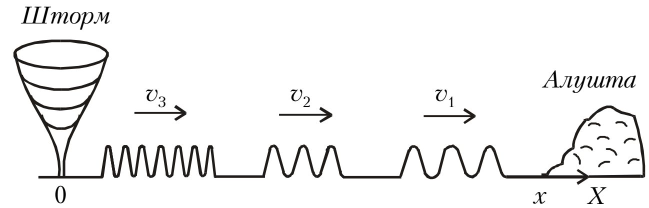

Рис. 4

Оказывается, чтобы правильно произвести подсчет в модельном эксперименте, его следовало бы проводить несколько иначе. Вместе с моделью волны надо еще изготовить экран с прорезью (рис.2,*б*), в которую вмещается ровно 20 горбиков. И показывать их надо вместе, только двигать с разными скоростями (рис.2,*в*). Дело в том, что при анализе движения волновых пакетов следует пользоваться двумя правилами.

Во-первых, волновой пакет – это симбиоз двух объектов: плавной *огибающей* и быстроменяющейся *наполняющей.* Во-вторых, у каждого типа волн не одна, а две скорости. Первая (именно о ней мы обычно говорим как о скорости движения волны) – это фазовая скорость волны $v_ф$, т.е. скорость, с которой движется наполняющая, в нашем случае – горбики. Вторая – это групповая скорость волны $v_{гр}$, с которой движется огибающая, в нашем примере – экран. Фазовая и групповая скорости связаны между собой соотношением

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\left(kv_ф\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число волны. Мы будем пользоваться именно этим числом, а не длиной волны λ, так как это существенно упрощает математические записи. Отметим важную особенность приведенного соотношения. Если $v_ф$ не зависит от k, то $v_{гр} = v_ф$. Эти скорости различны только в том случае, если $v_ф$ зависит от длины волны, т.е. если волны обладают *дисперсией.*

Предвидя возможные возражения, давайте сразу же обсудим эти правила. Первое вряд ли вызовет сомнения. С точки зрения математики, профиль волнового пакета $h(x)$ представляет собой произведение двух функций: гладкой функции $F(x)$ – огибающей и бесконечной гармонической волны – наполняющей:

$$h(x) = F(x)\cos(kx).$$

Что касается второго правила, то здесь могут возникнуть вопросы. Например, такие. Разве могут оболочка и содержимое двигаться с разными скоростями, и как же тогда назвать то, что получится спустя некоторое время? Оказывается, могут. Только происходит это движение не так, как показано на рисунке 3,*а*, а иначе. Горбик не обгоняет огибающую. Просто доходя до переднего фронта, он исчезает, а ему на смену на заднем фронте рождается новый (рис.3, *б*). Стать первым, чтобы исчезнуть, – вот кредо каждого горбика.

А как получить формулу, связывающую групповую и фазовую скорости? Здесь достаточно ограничиться лишь пояснением. Рассмотрим простой «суррогат» волнового пакета – две волны, имеющие частоты $\omega + \Delta\omega/2$ и $\omega - \Delta\omega/2$ и волновые числа $k + \Delta k/2$ и $k - \Delta k/2$ соответственно. Их сумма равна

$$A\cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) +$$

$$+ A\cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega t - kx).$$

Видно, что основная волна – с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ и скоростью $v_ф = \omega/k$ – модулируется огибающей в виде волны с длиной волны $\lambda = 2\pi/\Delta k$ и скоростью $v_{гр} = \Delta\omega/\Delta k = \Delta\left(v_ф k\right)\big/\Delta k$.

Теперь нам по силам объяснить, почему число подъемов поплавка ровно в два раза больше числа горбиков. Причина – в особом законе дисперсии для гравитационных волн, который мы примем без доказательства[1]:

$$v_ф = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Вычислим групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}v_ф.$$

Это и есть ключ к отгадке! Групповая скорость для гравитационных волн ровно в два раза меньше, чем фазовая. За время, пока волновой пакет пройдет мимо точки наблюдения (поплавка), успеет родиться еще ровно столько же гребней, сколько содержится в волновом пакете. И на каждом из этих гребней поднимется поплавок.

Вернемся к модельному эксперименту. Будем двигать и огибающую и наполняющую, только скорость наполняющей установим в два раза большей скорости огибающей. Проверим, сколько раз поднимется поплавок. Все правильно – ровно 40 раз!

Шторм

Попробуем свои силы на более масштабной задаче:

---

[1] *Можно получить этот закон с помощью метода размерностей. Действительно, скорость гравитационных волн v (размерность м/с) может зависеть только от плотности ρ (кг/м^3), ускорения свободного падения g (м/с^2) и длины волны λ (м). Единственно возможный вариант: $v \sim \sqrt{g\lambda}$. (Прим. ред.)*