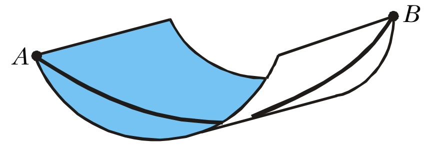

Рис.6

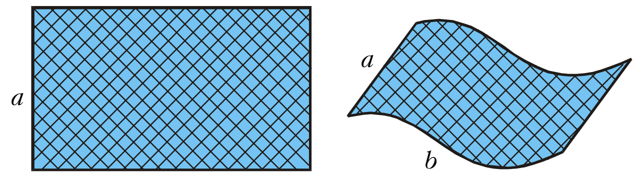

Рис. 9

очень просто: соединим точки A и B отрезком и измерим его длину (рис.5).

Рассмотрим, однако, тот же изогнутый лист, но на этот раз с прочерченной на нем диагональю AB (рис.6), длина которой (при деформации листа она не изменилась) определяла ранее расстояние между точками A и B. Она определяет его и теперь.

Итак, расстояние между точками A и B на изогнутом бумажном листе можно вычислять по-разному, причем, как нетрудно заметить, расстояние между точками A и B, вычисленное описанными способами, приводит к разным результатам (ясно, что длина отрезка AB на рисунке 5 меньше длины диагонали AB на рисунке 6).

Изгибая бумажный лист чуть сильнее, мы легко убеждаемся в том, что длина отрезка AB становится меньше (рис.7), в то время как длина изогнутой диагонали остается неизменной.

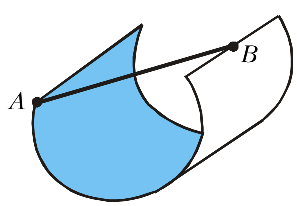

Рис. 7

Теперь представим себе, что мы находимся на краю оврага в точке A и хотим попасть на другой его край – в точку B. Выбранный путь будет зависеть от наших возможностей – если мы умеем перемещаться по воздуху (как муха), то это отрезок AB, если нет (как муравей) – то это искривленная диагональ (рис.8). Каждый из двух этих путей будет кратчайшим, но в первом случае самый короткий путь ищется среди всех возможных путей, соединяющих точки A и B, а во втором – среди всех путей, соединяющих точки A и B и проходящих по дну оврага.

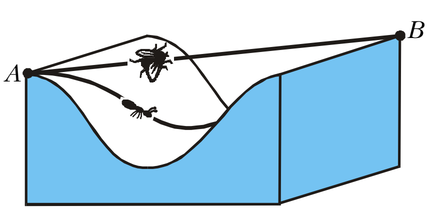

Рис.8

Таким образом, если разрешено перемещение только по листу бумаги, то кратчайшим путем всегда будет искривленная диагональ (с неизменной длиной), а если никаких ограничений нет и допускается перемещение вне изогнутого листа, то кратчайшим окажется прямолинейный отрезок переменной длины.

И мы можем сделать следующий важный вывод: точки бумажного листа связаны числовыми характеристиками, которые не зависят от того, как именно этот лист располагается в пространстве.

Заметим также, что при любых деформациях листа (без растяжений и разрывов) неизменна и его площадь – она всегда остается равной ab (рис.9).

Возможное ощущение неожиданности сделанного вывода, если оно и появилось, может быстро исчезнуть, если рассмотреть следующую ситуацию. В помещении, имеющем форму, изображенную на рисунке 10, требуется указать самый короткий путь от окна C к окну D. Стены не позволяют идти напролом, и поэтому искомый маршрут будет слагаться из трех прямолинейных отрезков CE, EF и FD. (Вместо стен может быть просто проведенная на земле линия, переступать которую запрещено.) Таким образом, оставаясь внутри помещения и решая поставленную задачу, мы получаем один результат, а имея возможность выходить вовне – другой.

Тем самым, можно говорить и о внутренней геометрии путей (путей с ограничениями), и о внешней геометрии путей (путей без ограничений), и эти две геометрии оказываются разными.

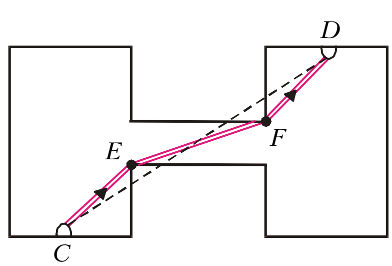

Рис.10

В качестве примера рассмотрим куб со стороной, равной 1 (рис.11). Расстояние между его противоположными вершинами A и B равно $\sqrt{3}$ – длине диагонали куба AB. Если же вычислять расстояние между этими

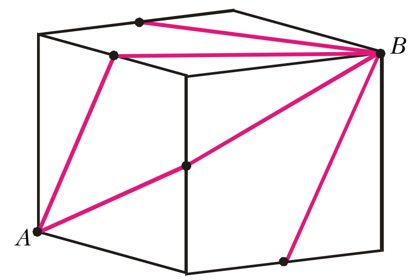

Рис.11

точками, не уходя с поверхности куба, то оно окажется равным

$$2\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{5},$$

причем путей такой длины будет целых шесть.

Этюд второй: расстояние в один фарсах

Вспомним, как начинается «Песнь о вещем Олеге» [1] –

Как ныне сбирается вещий Олег
Отмстить неразумным хазарам:
Их села и нивы за буйный набег
Обрек он мечам и пожарам...

Название «хазары» было известно уже первому русскому летописцу, автору «Повести временных лет», и с тех пор упоминалось в русской исторической литературе неоднократно. Огромное количество сведений о хазарском народе, иногда совпадающих, а иногда исключающих одно другое, оставили и другие соседи. Но документом, дающим самые исчерпывающие сведения о хазарах, является письмо хазарского царя Иосифа в Испанию к сановнику халифа Абдрахмана III – Хасдаи ибн Шафруту, написанное в середине X века.