Решения задач М1651 — М1660, Ф1668 —Ф1672

М1651. *Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ox, Oy и прямую x = y суть отрезки единичной длины.*

Ответ: а) $\sqrt{2}-1$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$.

Для обоих случаев а) и б) фигура F, о которой идет речь в задаче, заключается внутри шестиугольника, являющегося пересечением трех полос (шириной 1 каждая) (рис.1). Назовем такой шестиугольник накрывающим. В случае б) фигура F совпадает с накрывающим шестиугольником, достигая наибольшей площади тогда, когда накрывающий шестиугольник симметричен относительно обеих диагоналей квадрата. Эта наибольшая площадь равна $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$, как показывают элементарные вычисления.

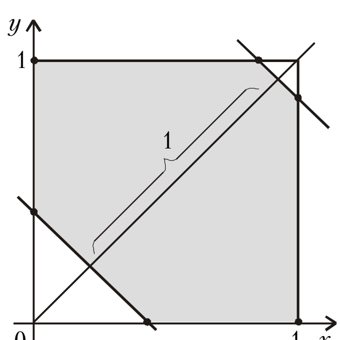


Рис.1

Минимальная площадь фигуры F (случай а)) реализуется на многоугольнике, который на каждой стороне накрывающего шестиугольника имеет по крайней мере одну вершину. Таким многоугольником будет четырехугольник $ABCD$ (рис.2), который во всех разновидностях накрывающих шестиугольников имеет одну и ту же площадь $\sqrt{2}-1$.

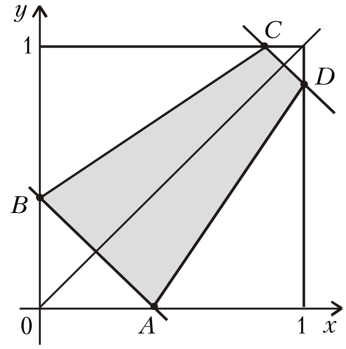


Рис.2

В.Тиморин

М1652. *Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом – окружности ω_n. Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине.*

Ответ: r_{1998} = 1997,5. Обозначим радиус n-й окружности через r_n. Тогда уравнение $(n+1)$-й окружности имеет вид

$$x^2+\left(y-\left(2r_1+2r_2+\ldots+2r_n+r_{n+1}\right)\right)^2=r_{n+1}^2.$$

Поскольку эта окружность касается параболы $y = x^2$, уравнение

$$y+\left(y-\left(2S_n+r_{n+1}\right)\right)^2=r_{n+1}^2,$$

где

$$S_n=r_1+r_2+\ldots+r_n,$$

имеет только один корень. Раскрыв скобки, получаем уравнение

$$y^2-\left(4S_n+2r_{n+1}-1\right)y+4S_n^2+4S_nr_{n+1}=0.$$

Приравняв его дискриминант $\left(4S_n+2r_{n+1}-1\right)^2-4\left(4S_n^2+4S_nr_{n+1}\right)=\left(2r_{n+1}-1\right)^2-8S_n$ нулю, находим (ибо $r_{n+1}\ge 1/2$) величину $r_{n+1}=\left(\sqrt{8S_n}+1\right)/2$.

По условию задачи, $r_1 = 1/2$. Легко найти $r_2 = 3/2$, $r_3 = 5/2$. Возникает гипотеза, что

$$r_{n+1}=n+\frac{1}{2}.$$

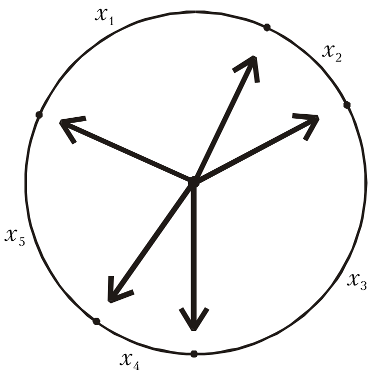
Ее легко доказать по индукции: если $r_n = n-\dfrac{1}{2}$ при некотором натуральном n, то

$$r_{n+1}=\frac{\sqrt{8\left(\frac{1}{2}+\ldots+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}+1}{2}=$$

$$=\sqrt{1+3+\ldots+(2n-1)}+\frac{1}{2}=n+\frac{1}{2}.$$

М.Евдокимов

М1653. *На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?*



Ответ: за 24 часа. Отметим на циферблате положения часовых стрелок всех пяти часов (см. рисунок). Циферблат разобьется на пять секторов. Занумеруем их по кругу. Пусть часовая стрелка проходит секторы за x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 часов соответственно. (Некоторые из этих чисел, возможно, нулевые; сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ равна 12 часам.)

Чтобы перевести все часы на начало первого сектора, необходимо затратить $S_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_4 + x_5) + x_5 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$ часов. Аналогично можно посчитать величины S_2, S_3, S_4 и S_5, где S_i – время, необходимое для установки всех часов на начало i-го сектора. Следовательно, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 10 \cdot 12 = 120$ часов; наименьшая из величин S_i не превосходит $120 : 5 = 24$ часа.

С другой стороны, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ (например, если часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам. Менее чем 24 часами в такой ситуации не обойтись.

О.Подлипский

М1654. *Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравнобедренного треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E. Докажите, что угол BED прямой.*

Первое решение. Обозначим $O = LD \cap ME$, и пусть точка O лежит внутри треугольника ABC (именно такое расположение было предложено рассмотреть на олимпиаде). ME – медиана треугольника MBC (рис.1), а значит, и треугольника MDL, т.е. $OL = OD$. Далее, $\angle DLB = \angle LBC$, $\angle MEL = \angle ABL = \angle LBC$. Получили: $\angle MEL = \angle DLB$, $OL = OE$.

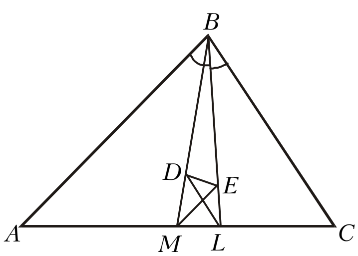


Рис.1

Итак, в треугольнике LED медиана EO равна половине стороны LD. Следовательно, угол DEL прямой, откуда сразу следует утверждение задачи.

Случай внешнего расположения точки O рассматривается аналогично. А можно и не рассматривать этот случай, а просто сослаться на такое почти очевидное предложение.

Лемма. Пусть B и C – произвольные точки на выходящих из A лучах (рис.2), $BD \| CK$, $CE \| BF$. Тогда и $ED \| KF$.

Доказательство следует из теоремы Фалеса; легко получить его и с помощью векторов.

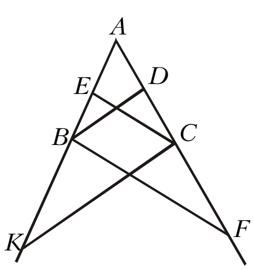


Рис.2

С помощью векторов нетрудно получить и естественное решение исходной задачи.

Второе решение. Ниже мы будем рассматривать векторы в базисе $\{\vec{a}, \vec{c}\}$, где $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{BA}$, длины этих векторов обозначим через a и c соответственно.

Имеем: $\vec{BL} = \vec{c} + \dfrac{c}{a+c}\left(\vec{a} - \vec{c}\right) = \dfrac{1}{a+c}\left(a\vec{c} + c\vec{a}\right)$.

Обозначим $\vec{BE} = \alpha \vec{BL}$, тогда

$$\alpha \vec{BL} + \vec{EM} = \vec{BM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right).$$

Приравняем проекции левой и правой частей этого равенства на вектор $\vec{a}$: $\dfrac{\alpha c}{a+c} = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{a+c}{2c}$.

Аналогично, положив $\vec{BD} = \beta \vec{BM}$, получим $\beta \vec{BM} + \vec{DL} = \vec{BL}$; проектируя обе части этого равенства на $\vec{c}$, находим $\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a}{a+c}$.

Получили $\vec{BE} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{a}{2c}\vec{c}$, $\vec{BD} = \dfrac{a}{a+c}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$. Таким образом, $\dfrac{\vec{BE}}{a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{a}}{a} + \dfrac{\vec{c}}{c}\right)$ – это высота треугольника, построенного на единичных векторах $\dfrac{\vec{a}}{a}$ и $\dfrac{\vec{c}}{c}$. Далее, $\dfrac{\vec{BD}}{a} = \dfrac{1}{a+c}\left(a \cdot \dfrac{\vec{a}}{a} + c \cdot \dfrac{\vec{c}}{c}\right)$ – (внутренняя) точка основания этого треугольника, отличная от основания высоты. Поэтому очевидно (рис.3), что $\dfrac{\vec{BD}}{a} - \dfrac{\vec{BE}}{a} \perp \vec{BE}$ – и утверждение задачи доказано.

Разумеется, к этому решению можно было подойти более формально: вектор $\vec{BD} - \vec{BE} = \dfrac{a(a-c)}{2(a+c)}\left(\dfrac{\vec{a}}{a} - \dfrac{\vec{c}}{c}\right)$ параллелен основанию треугольника. А можно было и воспользоваться понятием скалярного произведения:

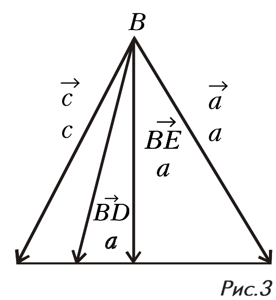


Рис.3

$$\left(\vec{BD}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\left(\vec{a}, \vec{c}\right)}{ac}\right),$$

$$\left(\vec{BE}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\left(\vec{a}, \vec{c}\right)}{ac}\right).$$

А.Акопян, В.Сендеров

М1655. *Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?*

Ответ: да, существуют. Скажем, что набор чисел удовлетворяет условию U, если произведение любых двух чисел набора делится нацело на квадрат их разности.

Пусть набор $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ состоит из чисел, удовлетворяющих данному условию U. Тогда набор $N_1 = \{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$, где $b_1 = a_1$, …, $b_n = a_n$, $b_{n+1} = 0$, также удовлетворяет U. Прибавим к каждому b_i число $c = (b_2 - b_1)^2 \cdot (b_3 - b_2)^2 \cdot (b_3 - b_1)^2 \cdot \ldots \cdot (b_{n+1} - b_n)^2$. Получим набор N_2, состоящий из натуральных чисел и также удовлетворяющий U, так как $\left((b_i + c) - (b_j + c)\right)^2 = (b_i - b_j)^2$ и $(b_i + c)(b_j + c) = b_i b_j + c(b_j + b_j + c)$ – делится на $(b_1 - b_j)^2$.

Поэтому, взяв в качестве исходного набора $N_1 = \{1, 2\}$, последовательным применением указанной процедуры мы сможем получить набор из 1998 натуральных чисел, удовлетворяющий условию U.

Г.Гальперин

М1656. *Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.*

Обозначим через F_1 и F_2 данные многоугольники. Предположим, что они имеют общую внутреннюю точку. Возможны два случая.

1) Один многоугольник содержится внутри другого, скажем, F_1 лежит внутри F_2. Пусть A – одна из вершин F_1. Тогда, как легко видеть, найдутся три вершины P, Q, R многоугольника F_2 такие, что треугольник PQR содержит A (случай, когда A лежит на стороне треугольника PQR, легко приводит к противоречию). При этом хотя бы один из углов PAQ, QAR, RAP больше 90°. Пусть для определенности $\angle PAQ \geq 90°$. Тогда имеем: $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$. Получаем, что, вопреки условию, один из отрезков AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – противоречие.

2) Сторона одного многоугольника пересекает сторону другого. Пусть, например, сторона AB многоугольника F_1 пересекает сторону PQ многоугольника F_2. Пусть $APBQ$ – выпуклый четырехугольник (случай, когда среди точек A, B, P, Q найдутся три, лежащие на одной прямой, легко рассматривается). Хотя бы один из его углов, скажем PAQ, не меньше 90°. Тогда $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$, следовательно, один из отрезков AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем противоречие.

В.Дольников

М1657. *Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу – конечную последовательность указанных команд – и дает ее Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Вовочки?*

Ответ: верно. Чтобы написать такую универсальную программу, Марья Ивановна может рассуждать таким образом.

Занумеруем возможные начальные положения, т.е. пары (лабиринт, положение ладьи). Их конечное число. Составим программу P_1 обхода всех полей для первого начального положения. Предположим теперь, что начальным было положение номер 2. Применим программу P_1. Если ладья обошла не все поля, допишем в конце несколько команд, чтобы обойти оставшиеся поля. Получим программу P_2. Применим программу P_2 к ладье в третьем начальном положении, снова допишем программу и так далее.

В.Уфнаровский, А.Шаповалов

М1658. *Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа x. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что $S(a + b) < 5$, $S(a + c) < 5$ и $S(b + c) < 5$, но $S(a + b + c) > 50$?*

Подойдут, например, числа $a = 5555554445$, $b = 5554445555$, $c = 4445555555$. Убедимся в этом: $S(a + b) = S(11110000000) = 4$, $S(a + c) = S(10001110000) = 4$, $S(b + c) = S(10000001110) = 4$, $S(a + b + c) = S(15555555555) = 51 > 50$.

Как можно придумать такие числа? Заметим, что $S(2(a + b + c)) = S((a + b) + (a + c) + (b + c)) \leq S(a + b) + S(a + c) + S(b + c) \leq 12$. Значит, число $n = 2(a + b + c)$ при делении на 2 должно резко увеличить свою сумму цифр. Такое возможно, если в числе много единиц, а в частном много пятерок. Возьмем, например, $n = 31111111110$, тогда $S(n) = 12$ и $S(n/2) = 51$. Разложим n на три слагаемых с суммой цифр 4 и меньших $\frac{n}{2}$: $n = 11110000000 + 10001110000 + 10000001110$, а затем решим систему уравнений $a + b = 11110000000$, $a + c = 10001110000$, $b + c = 10000001110$. Получим искомый пример.

С.Волченков, Л.Медников

М1659*. *Фигура Ф, составленная из клеток 1×1, обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Ф можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника под фигурой Ф была положительна (фигуру Ф можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Ф в несколько слоев.*

Пусть Φ_1, …, Φ_k – все возможные расположения фигуры Φ в прямоугольнике. Утверждение задачи можно переформулировать так: можно взять фигуры Φ_i такой толщины d_i, $i = 1, \ldots, k$ (d_i рационально, возможно $d_i = 0$), что суммарная толщина всех фигур Φ_i над каждой клеткой прямоугольника будет равна 1.

Возможность такой переформулировки усматривается из того, что найдется такое натуральное число N, что все Nd_i станут целыми неотрицательными числами.

Предположим, что переформулированное утверждение неверно. Покажем, что тогда существует такое заполнение клеток прямоугольника числами, при котором сумма всех чисел положительна, а сумма чисел в клетках, закрываемых фигурой при любом ее положении, – неположительна.

Введем обозначения: индексом j, $j = 1, \ldots, m \times n$, будем нумеровать клетки прямоугольника, индексом i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, k$, – положения фигуры Φ на прямоугольнике.

Положим $P_{ij} = 1$, если j-я клетка закрыта фигурой Φ_i, $P_{ij} = 0$, если не закрыта. Тогда набору чисел $\{d_i\}$ соответствует заполнение клеток прямоугольника числами $\theta_j = 1 - \sum_i d_i P_{ij}$, характеризующими уклонение покрытия прямоугольника фигурами от равномерного. По нашему предположению все числа θ_j не могут быть равными нулю.

Выберем числа $d_j \geq 0$ так, чтобы величина $|\theta|$ уклонения была минимальна, где $|\theta|^2 = \sum_j \theta_j^2$. Покажем, что получившиеся числа θ_j образуют искомое заполнение клеток прямоугольника. При этом обоснование существования набора $\{d_i\}$, который минимизирует $|\theta|$, читатель без большого труда проведет самостоятельно.

Заменим одно число d_i на $d_i' = d_i + x$, $x \geq -d_i$. Тогда $\theta_j' = \theta_j - xP_{ij}$, следовательно, $|\theta'|^2 = \sum_j \theta_j'^2 = \sum_j \theta_j^2 - 2x\sum_j \theta_j P_{ij} + x^2 \sum_j P_{ij}^2$, т.е. $|\theta'|^2 = y(x) = ax^2 - 2b_i x + c$. Здесь $a = \sum_j P_{ij}^2 = \sum_j P_{ij} = N$, где N – число клеток в фигуре, $c = |\theta|^2$. Квадратный трехчлен $y = y(x)$, заданный на множестве $x \geq -d_i$, принимает наименьшее значение при $x = 0$ в случае $b_i = 0$, если $d_i > 0$, и в случае $b_i \leq 0$, если $d_i = 0$. Таким образом, предположив, что $|\theta|$ минимален на наборе $\{d_i\}$, мы получаем, что если $d_i > 0$, то $b_i = \sum_j \theta_j P_{ij} = 0$, а если $d_i = 0$, то $b_i \leq 0$. Значит, сумма чисел, закрываемых фигурой Φ_i, а это $\sum_j \theta_j P_{ij}$, – неположительна; с другой стороны, сумма всех чисел в прямоугольнике положительна, так как она равна $\sum_j \theta_j$, а $\sum_j \theta_j = \sum_j \theta_j^2$. Действительно,

$$\sum_j \theta_j^2 = \sum_j \theta_j \left(1 - \sum_j d_i P_{ij}\right) = \sum_j \left(\theta_j - \sum_i d_i \left(\theta_j P_{ij}\right)\right) =$$

$$= \sum_j \theta_j - \sum_{i, d_i > 0} \sum_j \theta_j P_{ij} = \sum_j \theta_j,$$

так как $b_i = 0$ при $d_i > 0$.

Этим завершается решение задачи.

А.Белов

М1660*. *В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.*

Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, ребрами – авиалинии. По условию получится связный граф, степени вершин которого равны трем.

Предположим, что в графе есть два пересекающихся (по вершине) цикла. Тогда рассмотрим вершину O, в которой они «разветвляются». Эта вершина, очевидно, имеет степень три. Удалим эту вершину и три выходящих из нее ребра OA, OB, OC. Нетрудно заметить, что граф сохранил связность, так как существует путь, соединяющий вершины A, B и C.

Рассмотрим полученный граф. Если в нем есть два пересекающихся цикла, то повторим операцию, и так далее. Очевидно, что никакие две удаленные вершины не соединены ребром в исходном графе, так как мы удаляли только вершины степени три, а после каждой операции степени вершин, соседних с удаленными, уменьшались, т.е. они не могут стать равны трем.

Предположим, что в связном графе n вершин и не менее чем $\frac{4}{3} \cdot n$ ребер. Докажем, что в таком графе обязательно есть два пересекающихся цикла. Предположим, что это не так. В силу связности графа в нем можно выделить дерево с n вершинами. Будем «возвращать» в граф оставшиеся после выделения дерева ребра. Добавление каждого ребра увеличивает количество циклов по крайней мере на один. Однако, если какое-либо ребро добавит не менее двух циклов, они будут пересекающимися, что противоречит нашему предположению. С другой стороны, каждый цикл содержит не менее чем три вершины, и никакая вершина не входит в два цикла. Кроме того, дерево с n вершинами содержит ровно $n - 1$ ребро. Следовательно, ребер не более чем $(n-1) + \frac{n}{3} < \frac{4n}{3}$. Противоречие.

Пусть $N = 1998$ – исходное количество вершин, тогда исходное количество ребер равно $\frac{3}{2}N$. За каждую операцию выкидывания вершины количество вершин уменьшается на одну, а количество ребер уменьшается на три. Предположим, что было сделано x операций. Тогда стало $N - x$ вершин и $\frac{3}{2}N - 3x$ ребер. До тех пор, пока выполняется неравенство $\frac{3}{2}N - 3x \geq \frac{4}{3}(N - x)$, вершины удалять можно. Решив это неравенство, получаем $x \leq \frac{N}{10}$, т.е. можно удалить $\left[\frac{1998}{10}\right] + 1 = 200$ вершин. Отсюда и следует утверждение задачи.

Д.Карпов, Р.Карасев

Ф1668. *Автомобиль выезжает из города А и приезжает, двигаясь без остановок по прямому шоссе, в город Б. Оказалось, что в течение первой половины времени поездки его скорость была 40 км/ч, половину оставшегося пути он проехал со скоростью 60 км/ч, а остаток пути – со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия.*

Пусть «половина оставшегося пути» составляет x. Тогда вторая половина времени поездки равна $x/v_2 + x/v_3$, а все расстояние между городами равно $2x + v_1(x/v_2 + x/v_3)$. Осталось разделить эту величину на полное время поездки $2(x/v_2 + x/v_3)$ и сократить на x. В результате для искомой средней скорости получаем

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_2 v_3}{v_2 + v_3} + \frac{v_1}{2} \approx 54{,}3 \text{ км/ч}.$$

З.Рафаилов

Ф1669. *На горизонтальной поверхности покоится гладкий клин массой M с углом α при основании. Куб такой же массы лежит на столе, касаясь клина (рис.1). Коэффициент трения между кубом и столом μ. На клин ставят тележку массой m, которая может скользить по клину без трения, и отпускают. Какую скорость приобретет тележка, опустившись на высоту h (при этом она все еще находится на поверхности клина)?*

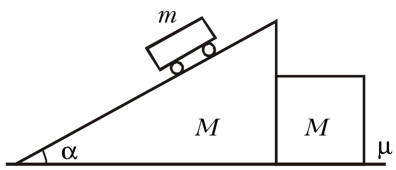


Рис.1

Если сила трения достаточна для удержания системы на месте, то скорость тележки будет равна $v = \sqrt{2gh}$. При этом справедливы соотношения

$$N = mg\cos\alpha \text{ и } N\sin\alpha = F_{\text{тр}} \le \mu Mg,$$

где N – сила реакции, действующая на тележку со стороны клина.

Если же сила трения недостаточная, в движение придут все тела системы. Представим ускорение тележки в виде суммы (векторной) двух ускорений (рис.2): ускорения

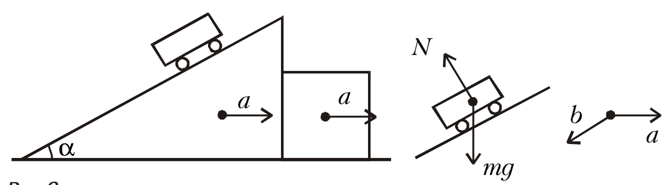


Рис.2

$\vec{a}$, с которым тележка движется вместе с клином, и ускорения $\vec{b}$ относительно клина. Запишем уравнения второго закона Ньютона для тележки, в проекциях на направления вдоль клина и перпендикулярно ему, и для клина вместе с кубом, в проекциях на горизонтальное направление:

$$mg\sin\alpha = m(b - a\cos\alpha), \qquad mg\cos\alpha - N = ma\sin\alpha,$$

$$N\sin\alpha - \mu Mg = 2Ma.$$

Исключая N, находим

$$a = g\frac{m\sin\alpha\cos\alpha - \mu M}{2M + m\sin^2\alpha},$$

$$b = g\sin\alpha \cdot \frac{2M + m - \mu M\operatorname{ctg}\alpha}{2M + m\sin^2\alpha}.$$

Время движения тележки вниз равно

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{b\sin\alpha}}.$$

Удобно теперь ускорение тележки представить в виде суммы двух перпендикулярных составляющих вдоль и поперек наклонной плоскости, равных

$$a_1 = b - a\cos\alpha = g\sin\alpha \text{ и } a_2 = a\sin\alpha.$$

Тогда для скорости тележки получаем

$$v = \sqrt{(a_1\tau)^2 + (a_2\tau)^2} =$$

$$= \tau\sqrt{(g\sin\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2} = \sqrt{\frac{2h\sin\alpha}{b}}\sqrt{g^2 + a^2},$$

или, после подстановки значений для a и b,

$$v = \frac{\sqrt{2gh}(m\sin\alpha\cos\alpha - \mu M)}{\sqrt{(2M + m - \mu M\operatorname{ctg}\alpha)(2M + m\sin^2\alpha)}}.$$

А.Клинов

Ф1670. *Комната площадью S = 20 м^2 с высотой потолка H = 3 м заполнена воздухом при нормальных условиях. Оцените число ударов молекул о потолок за время τ = 1 ч. Куда чаще ударяют молекулы – в пол или в потолок комнаты? Оцените разность чисел ударов молекул о пол и о потолок за время τ. Считайте температуру воздуха в комнате повсюду одинаковой.*

Пусть v_z – «средняя» проекция скорости молекулы на направление «к потолку», n – концентрация молекул. Тогда число ударов молекул о потолок за время τ будет $N_{\text{уд}} = 0{,}5nv_zS\tau$. Оценим v_z по среднему квадрату скорости молекулы (не забывая взять от этого значения одну треть):

$$v_z = \sqrt{\frac{RT}{\text{M}}} \approx 3\cdot10^2 \text{ м/с},$$

где температура воздуха $T \approx$ 300 К, а средняя молярная масса воздуха М = 0,029 кг/моль. Концентрацию найдем из соотношения

$$n = \frac{p}{kT} \approx 2{,}5\cdot10^{25} \text{ м}^{-3},$$

где давление воздуха $p \approx 10^5$ Па, а постоянная Больцмана $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

Таким образом,

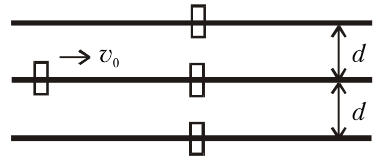
$$N_{\text{уд}} = 0{,}5nv_zS\tau \approx 2{,}5\cdot10^{32}.$$

Разность чисел ударов о пол и потолок при неизменной температуре определяется разностью концентраций молекул (у пола давление выше на $\Delta p = \rho gH = p\text{M}gH/(RT)$):

$$\Delta N_{\text{уд}} = \frac{N_{\text{уд}}\Delta p}{p} = \frac{N_{\text{уд}}\text{M}gH}{RT} \approx 10^{29} \approx \frac{1}{4000}N_{\text{уд}}.$$

Р.Александров

Ф1671. *Три параллельных тонких непроводящих стержня находятся в горизонтальной плоскости; расстояние между соседними стержнями d (см. рисунок). На стержни насажены тяжелые шайбы массой M каждая, заряженные одинаковыми зарядами Q. В начальный момент три из них неподвижны и находятся на прямой, перпендикулярной стержням, а четвертая движется издали по среднему стержню со скоростью*



v_0. Найдите скорости шайб через большой промежуток времени. Трения нет.

Три расположенные рядом шайбы находятся в состоянии неустойчивого равновесия. Будем считать, что именно налетающая шайба из этого равновесия их выведет. Разлет трех шайб будем рассчитывать без учета импульса и энергии налетающей шайбы – она находится далеко и только нарушает равновесие. Для начала нужно посчитать энергию взаимодействия средней и двух крайних шайб – она равна

$$W = \frac{2kQ^2}{d}$$

(расчет простой – перенесем по очереди три шайбы из бесконечности в заданные точки и просуммируем совершенные работы). На среднюю шайбу со стороны налетающей шайбы действует чуть большая сила, чем на две другие, поэтому предположим, что вначале она смещается чуть вправо относительно других двух шайб (строго говоря, неустойчивое равновесие вещь деликатная, нужно было бы рассмотреть все возможные варианты, но это сделало бы решение чересчур громоздким). Таким образом, после разлета крайние шайбы полетят влево, а средняя – вправо. Обозначим скорости крайних шайб u, тогда скорость средней будет $2u$ (закон сохранения импульса). Из закона сохранения энергии

$$W = \frac{2Mu^2}{2} + \frac{M(2u)^2}{2} = 3Mu^2$$

находим

$$u = \sqrt{\frac{2kQ^2}{3Md}}.$$

Теперь рассмотрим взаимодействие налетающей (движущейся по среднему стержню) шайбы и движущихся навстречу двух крайних шайб. После их взаимодействия и разлета на большие расстояния электрическим взаимодействием между ними можно пренебречь (крайние шайбы по-прежнему летят дуплетом), а сумма кинетических энергий остается неизменной. Скорости теперь можно найти из законов сохранения импульса и энергии, нужно только определить, пролетит ли шайба между парой крайних или отразится. Найдем граничное значение скорости налетающей шайбы $v_{гр}$, при котором она отразится. Для этого учтем, что в граничном случае скорости выстроившихся в линию шайб будут равны между собой, и найдем их из закона сохранения импульса:

$$Mv_{гр} - 2Mu = 3Mv, \text{ и } v = \frac{v_{гр} - 2u}{3}.$$

Разность начальной и конечной кинетических энергий будет равна уже вычисленной величине W:

$$\frac{1}{2}Mv_{гр}^2 + Mu^2 - \frac{3}{2}Mv^2 = W.$$

Отсюда получаем $v_{гр} = 2u$.

Если скорость налетающей шайбы будет больше граничного значения $v_{гр}$, после разлета скорости шайб сохранятся (они как бы пролетают друг сквозь друга) и нужно будет рассчитывать и взаимодействие между улетевшей со скоростью $2u$ средней шайбой и налетающей. Впрочем, это совсем простая задача – при равенстве масс взаимодействующих тел шайбы просто обменяются скоростями, как будто налетающая шайба пролетела насквозь.

Если же скорость налетающей шайбы меньше вычисленного значения $v_{гр}$, нужно будет решать простую задачу про упругий удар налетающей шайбы и дуплета. Обозначив скорости через v_1 и v_2, запишем законы сохранения импульса и энергии:

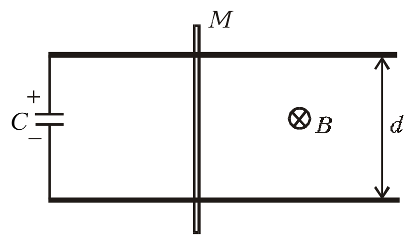
$$Mv_0 - 2Mu = Mv_1 + 2Mv_2,\ Mv_0^2 + 2Mu^2 = Mv_1^2 + 2Mv_2^2$$

и получим

$$v_1 = -\frac{v_0 + 4u}{3} \text{ и } v_2 = \frac{2v_0 - u}{3}.$$

Р.Сашин

Ф1672. *Тяжелый проводящий брусок массой M = 1 кг лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (см. рисунок). Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна B = 0,1 Тл. Заряженный до напряжения U = 100 В конденсатор емкостью C = 10 мкФ подключают к рельсам. Считая сопротивление цепи R = 1 кОм достаточно большим, определите установившуюся скорость движения бруска. Расстояние между рельсами d = 1 м. Брусок движется поступательно.*



Для определенности будем считать полярность конденсатора такой, что сила Ампера действует на брусок вправо. По мере разряда конденсатора ток будет уменьшаться, будет уменьшаться и сила, действующая на брусок. Установившееся равномерное движение соответствует нулевой силе; значит, при этой скорости ЭДС индукции будет равна по величине остаточному напряжению конденсатора.

Рассмотрим маленький интервал времени Δt в процессе еще не установившегося движения. Пусть в начале этого интервала скорость бруска равна v, ток в цепи I, сила $F = IBd$, ускорение $a = F/M$. За время Δt изменение скорости составит

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{IBd}{M}\Delta t,$$

а заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta Q = -I\Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta v = -\frac{Bd}{M}\Delta Q.$$

Сумма приращений скорости стержня дает установившуюся скорость. С другой стороны, сумма протекших по цепи зарядов определяется разностью начального и конечного (остаточного) зарядов конденсатора. Для установившейся скорости $v_у$ величина ЭДС индукции составляет $Bv_уd$, а суммарный протекший заряд равен $-C(U - Bv_уd)$. Подставляя соответствующие значения, получим равенство

$$v_у = \left(-\frac{Bd}{M}\right)\left(-C\left(U - Bv_уd\right)\right),$$

откуда найдем искомую скорость:

$$v_у = \frac{BdCU}{M + CB^2d^2} \approx 10^{-4} \text{ м/с}.$$

М.Учителев