

Законы Паскаля и Архимеда

А. ШЕРОНОВ



О ЗАКОНУ ПАСКАЛЯ, ДАВЛЕНИЕ в окрестности некоторой точки, находящейся в жидкости или газе, передается во все стороны без изменений. В соответствии с законом Архимеда, на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости или газа, вытесненного этим телом. В поле тяжести в жидкостях или газах давление в точках, отличающихся по высоте на h , изменяется на ρgh , где ρ – плотность жидкости или газа, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим теперь некоторые характерные примеры использования законов Паскаля и Архимеда при решении задач.

Задача 1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа (CO_2), температура которого вблизи поверхности планеты $T = 800 \text{ К}$, а плотность $\rho = 6,6 \text{ г/л}$. Оцените запасы CO_2 на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $r = 6300 \text{ км}$. Какой толщины была бы атмосфера Венеры, если бы она была равноплотной с давлением и температурой газа, равными их значениям у поверхности планеты? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8,2 \text{ м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, молярная масса углекислого газа $M = 44 \text{ г/моль}$.

По уравнению состояния идеального газа, давление у поверхности Венеры равно $p = \rho RT/M$. Это же давление равно весу атмосферы, деленному на площадь поверхности планеты: $p = mg/(4\pi r^2)$. Отсюда находим массу углекислого газа:

$$m = \frac{4\pi r^2 \rho RT}{Mg} \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ кг.}$$

В равноплотной атмосфере толщиной h давление у поверхности (на глубине h) равно ρgh . Сравнивая это

выражение с уравнением состояния, находим толщину равноплотной атмосферы:

$$h = \frac{RT}{Mg} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ м.}$$

Задача 2. Мыльный пузырь надуют азотом. При какой величине диаметра пузыря он начнет всплывать в атмосферном воздухе той же температуры? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 45 \text{ мН/м}$, молярная масса воздуха $M_{\text{в}} = 29 \text{ г/моль}$, азота $M_{\text{а}} = 28 \text{ г/моль}$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, массой пленки пренебречь.

Азот внутри мыльного пузыря находится под избыточным, по сравнению с атмосферным, давлением $\Delta p = 8\sigma/d$, где d – диаметр пузыря. Этот результат проще всего получить, если мысленно разрезать пузырь на две равные половинки плоскостью, проходящей через его центр, и рассмотреть условие равновесия этих половинок. Если избыточное давление в пузыре равно Δp , то половинки отрываются друг от друга с силой $\Delta p \pi d^2/4$. С другой стороны, они притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения мыльной пленки, действующими на длине окружности πd и равными $2\sigma \pi d$ (коэффициент «2» учитывает наличие двух поверхностей у пленки). Сравнение этих двух сил и дает величину избыточного давления под пленкой: $\Delta p = 8\sigma/d$.

Пузырь всплывет при условии, что выталкивающая сила, равная весу вытесненного пузыря воздуха при атмосферном давлении p_0 , больше веса азота, находящегося внутри пузыря под давлением $p_0 + \Delta p$. По уравнению состояния газа,

$$\frac{M_{\text{в}} p_0 \pi d^3}{6RT} \geq \frac{M_{\text{а}} (p_0 + \Delta p) \pi d^3}{6RT},$$

откуда находим

$$d \geq \frac{8\sigma M_{\text{а}}}{p_0 (M_{\text{в}} - M_{\text{а}})} \approx 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 3. Батискаф представляет собой шар радиусом $r = 2 \text{ м}$. При испытаниях в море в нижней части батискафа образовалась течь, и он затонул, а в его верхней части образовалась воздушная прослойка в виде шарового сегмента толщиной $h = 1 \text{ м}$. Чему равна глубина моря H , которой затонул батискаф? Какая масса воздуха понадобится для того, чтобы вытеснить из батискафа всю воду? Начальное (атмосферное) давление воздуха в батискафе равно давлению, которое создает слой воды толщиной $H_0 = 10 \text{ м}$. Указание: объем шарового сегмента толщиной h равен $\Delta V = \pi h^2 (3r - h)/3$.

Свободная поверхность воды внутри батискафа горизонтальна. Давление вблизи нее, равное давлению воздуха в батискафе, меньше давления в нижней части батискафа (точка A на рисунке 1) на величину $\rho g(2r - h)$, где $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды. В свою очередь, давление в точке A (дно

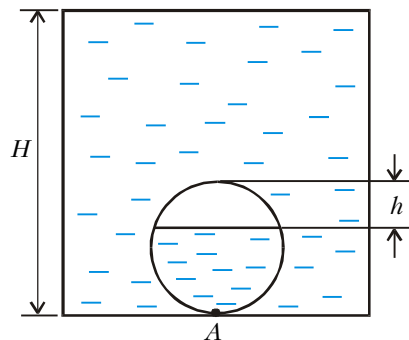


Рис. 1

водоема) складывается из атмосферного давления и давления слоя воды толщиной H . Чтобы найти глубину водоема, необходимо для воздуха, находящегося внутри батискафа (его масса по условию не изменилась), записать закон Бойля – Мариотта:

$$\begin{aligned} \rho g(H_0 + H - (2r - h)) \cdot \Delta V &= \\ &= \rho g H_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

По условию, $h = r/2$, поэтому окончательно находим

$$H = \frac{27}{5} H_0 + \frac{3}{2} r = 57 \text{ м.}$$

Чтобы найти массу воздуха, необходимую для вытеснения из батискафа воды, учтем, что в конце, когда воздух заполняет весь объем батискафа, его давление превышает атмосферное на ρgH . Из уравнения состояния нахо-

дим искомую массу воздуха:

$$m = \frac{M\rho gH \cdot 4\pi r^3/3}{RT} \approx 225 \text{ кг},$$

где $M = 29 \text{ г/моль}$ – молярная масса воздуха, $T = 290 \text{ К}$ – его температура. Можно отметить, что в стандартном баллоне объемом 40 литров под давлением 200 атмосфер при комнатной температуре содержится приблизительно 10 кг воздуха.

Задача 4. Свая в виде двух соосных цилиндров забита в грунт дна водоема глубиной H (рис.2). Какая сила действует на сваю со стороны воды?

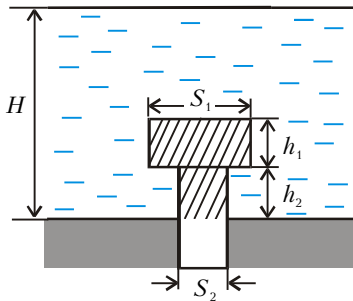


Рис. 2

Сечение верхнего цилиндра S_1 , его высота h_1 , сечение нижнего цилиндра S_2 , высота его части, находящейся в воде, h_2 .

Силы давления воды на боковые поверхности сваи компенсируют друг друга. Выталкивающая сила, действующая на нижнюю часть верхнего цилиндра сваи сечением $S_1 - S_2$, равна $\rho g(H - h_2)(S_1 - S_2)$, где ρ – плотность воды. Сила, прижимающая сваю к грунту, действует на верхнее основание сваи сечением S_1 и равна $\rho g(H - h_1 - h_2)S_1$. Результирующая сила равна

$$F = \rho g(h_1 S_1 + h_2 S_2) - \rho g H S_2.$$

Как видно, структура ответа простая: от обычной выталкивающей силы, найденной по закону Архимеда (соответствующий объем сваи на рисунке заштрихован), отнимается сила давления воды на нижнее основание сваи, как бы находящееся на уровне дна водоема. В зависимости от соотношения между h_1 , h_2 , S_1 , S_2 , H результирующая сила может быть как выталкивающей, так и прижимающей сваю ко дну водоема. В приведенных формулах отсутствует также атмосферное давление. Вопрос о том, проникает ли воздух через грунт и тем самым передает свое давление на нижнее основание сваи, забитой в грунт, мы оставляем на суд читателя.

Задача 5. В стратифицированной жидкости плотность увеличивается с глубиной h по линейному закону $\rho(h) = \rho(0)(1 + \alpha h)$, где $\rho(0)$ – извест-

ная плотность на поверхности. Для измерения константы α в жидкость на нити, прикрепленной к динамометру, опускают цилиндрическое тело длиной L и сечением S . Когда тело перемещается по вертикали на H , оставаясь целиком погруженным в жидкость, показания динамометра изменяются на ΔF . Чему равна константа α ?

Вспользуемся законом Архимеда и найдем разность выталкивающих сил при перемещении тела по вертикали на H . Очевидно, что если тело опускается, выталкивающая сила увеличивается, а показания динамометра, равные разности веса тела и силы Архимеда, уменьшаются. Пусть в начале верхняя грань цилиндра находится на глубине h_1 , нижняя на глубине $h_1 + L$, а в конце – верхняя на глубине $h_1 + H$, нижняя на глубине $h_1 + H + L$. Так как плотность жидкости меняется по линейному закону, вес воды, вытесненной телом в начале, пропорционален площади трапеции, заштрихованной на рисунке 3:

$$F_1 = gSL \frac{\rho(h_1) + \rho(h_1 + L)}{2}.$$

Аналогично, вес воды, вытесненной

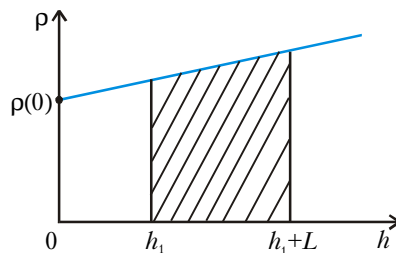


Рис. 3

телом в конце, равен

$$F_2 = gSL \frac{\rho(h_1 + H) + \rho(h_1 + H + L)}{2}.$$

При этом разность показаний динамометра составляет

$$\Delta F = F_2 - F_1 = gSL\rho(0)\alpha H,$$

откуда и находим константу α :

$$\alpha = \frac{\Delta F}{gSL\rho(0)H}.$$

Эту константу можно найти и из разности давлений на верхнее и нижнее основания цилиндра длиной L при его перемещении по вертикали на H (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача 6. Трубка, запаянная с одного конца, опускается в жидкость сначала открытым концом вниз, а затем вверх и плавает, находясь в вертикальном положении. Длина погруженной в жидкость части трубки в первом случае на $\Delta L = 5 \text{ см}$ больше,

чем во втором. Найдите высоту H слоя жидкости, зашедшей в трубку в первом случае. Отношение внутреннего сечения трубки S_1 к внешнему S_2 равно 0,5.

Сила тяжести трубки остается неизменной, поэтому и выталкивающая сила в обоих случаях одна и та же. В первом

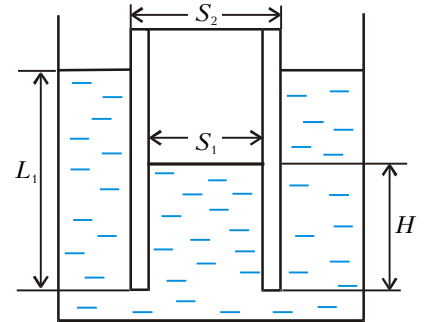


Рис. 4

случае (рис.4), по закону Архимеда, она равна $\rho g L_1 S_2 - \rho g H S_1$, во втором $\rho g L_2 S_2$, где ρ – плотность воды. Приравняв эти силы, получим

$$H = (L_1 - L_2) \frac{S_2}{S_1} = \Delta L \frac{S_2}{S_1} = 10 \text{ см}.$$

Приведем второй вариант решения – с использованием закона Паскаля, хотя в данном примере он и более громоздкий. В первом случае сила тяжести трубки mg и сила атмосферного давления p_0 на дно сечением S_2 уравновешены силой давления воздуха, находящегося внутри трубки при давлении p_1 , на внутреннюю поверхность дна S_1 и силой давления воздуха и воды на поверхность боковых стенок трубки площадью $S_2 - S_1$:

$$mg + p_0 S_2 = p_1 S_1 + (p_0 + \rho g L_1)(S_2 - S_1).$$

При этом имеет место очевидное равенство

$$p_1 = p_0 + \rho g(L_1 - H).$$

Во втором случае сила тяжести трубки уравновешена силой давления воды на дно сечением S_2 :

$$mg = \rho g L_2 S_2.$$

Силы давления атмосферы на поверхность трубки в этом случае скомпенсированы. Из приведенных равенств находим искомую высоту H .

Задача 7. На дне лунки кубической формы размером $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$ лежит шар, диаметр которого немного меньше 10 см. В лунку наливают воду плотностью $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ до тех пор, пока шар не начинает плавать, касаясь дна лунки. После этого в лунку долили еще $m = 250 \text{ г}$ воды так, что лунка оказалась заполненной водой до

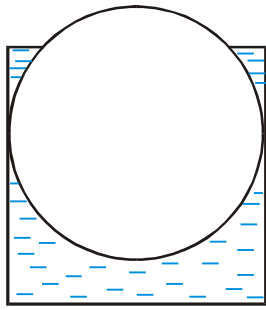


Рис. 5

верха (рис. 5). Какую массу воды налили в лунку вначале? Чему равна плотность материала шара? Указание: объем шарового сегмента высотой h равен $\Delta V = \pi h^2 (3d/2 - h)/3$, где d — диаметр шара.

По условию, сначала шар касается дна, а затем плавает в лунке, заполненной водой. Очевидно, что он всплывает при этом на высоту $h = m/(\rho d^2) = 2,5 \text{ см} = d/4$. Значит, именно такова высота части шара объемом ΔV , находящейся над водой. Плотность материала шара $\rho_{\text{ш}}$ определим из закона Архимеда:

$$\rho \left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V \right) = \rho_{\text{ш}} \frac{\pi d^3}{6},$$

откуда

$$\rho_{\text{ш}} = \rho \left(1 - \frac{2}{d^3} h^2 \left(\frac{3}{2} d - h \right) \right) = \frac{27}{32} \rho = 0,84 \text{ г/см}^3.$$

Далее, когда шар плавает в лунке, заполненной водой, в ней находится объем воды, равный $d^3 - (\pi d^3/6 - \Delta V)$, поэтому масса воды, налитая в лунку вначале, равна

$$m_0 = \rho \left(d^3 - \left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V \right) \right) - m = \rho \left(d^3 - \frac{27}{32} \frac{\pi d^3}{6} \right) - m = 310 \text{ г}.$$

Задача 8. В сосуд с водой (боковые стенки сосуда вертикальны) опустили кусок льда, в который был в заморожен осколок стекла. В результате уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 11 \text{ мм}$, а лед стал плавать, целиком погружившись в воду. На сколько опустится уровень воды в сосуде за время таяния льда? Плотность стекла $\rho_c = 2,0 \text{ г/см}^3$, воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, льда $\rho_l = 0,9 \text{ г/см}^3$.

Пусть объем стекла V_c , льда V_l , а сечение сосуда S . Увеличение уровня воды в сосуде в начале равно $h_1 =$

$= (V_c + V_l)/S$. Когда лед растает, вода, получившаяся из него, займет объем $V = V_l \rho_l / \rho$. Следовательно, в конце увеличение уровня воды в сосуде будет равно $h_2 = (V_c + V)/S$, а искомое понижение составит $\Delta h = h_1 - h_2$. Связь между объемом льда и стекла найдем из условия плавания:

$$\rho(V_l + V_c) = \rho_c V_c + \rho_l V_l,$$

откуда

$$V_c = V_l \frac{\rho - \rho_l}{\rho_c - \rho}.$$

Подставив это соотношение в формулы для h_1 и h_2 , найдем окончательно Δh :

$$\Delta h = h_1 \frac{\rho - \rho_l}{\rho} \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c - \rho_l} = 1 \text{ мм}.$$

Задача 9. Тройник с двумя открытыми в атмосферу и одной закрытой вертикальными трубками целиком заполнен водой. Когда тройник стали двигать по горизонтали (в плоскости рисунка 6) с некоторым ускорением, из него вылилась $1/8$ часть всей массы содержавшейся в нем воды. Чему равно давление в нижней части (точка А) закрытой трубки во время движения с ускорением? Внутренние сечения всех трубок одинаковы, длины трубок L .

При движении с ускорением a вправо вода из правого открытого в атмосферу колена перетекает в левое колено и оттуда выливается наружу. По условию, вылилась половина воды, находящейся в правом колене (длина всех трубок $4L$, вылилась $1/8$ часть всей массы воды). Запишем уравнения движения для воды, находящейся в каких-либо двух горизонтальных участках трубки. Для участка BC имеем

$$(p_B - p_C)S = \rho a S \frac{L}{2},$$

где $p_B = \rho g L + p_0$ — давление в точке B , p_C — давление в точке C , p_0 — атмосферное давление, S — сечение трубки, ρ — плотность воды. На участке BD жидкость движется под действием разности давлений $\rho g L/2$, так как атмосферные давления в точках B и D скомпенсированы:

$$\rho g \frac{L}{2} S = \rho a S L.$$

Разделив эти два уравнения друг на друга, находим

$$p_C = \frac{3}{4} \rho g L + p_0.$$

Давление в искомой точке A отличается от найденной величины на $\rho g L$, поэтому давление в нижней части закрытой трубки равно

$$p_A = \frac{7}{4} \rho g L + p_0.$$

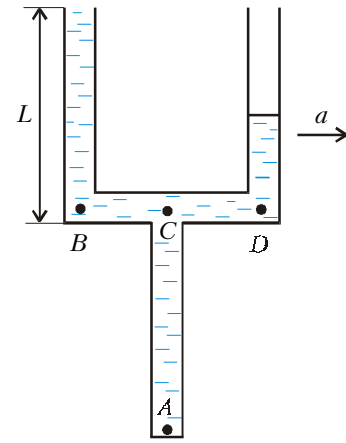


Рис. 6

Упражнения

1. Оцените массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Температура воздуха у поверхности $T = 290 \text{ К}$, радиус Земли $r = 6370 \text{ км}$. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха у поверхности Земли, равна $\rho = 0,26 \text{ г/л}$, процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере постоянное, толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. Слой какой толщины занял бы кислород у поверхности, если бы его температура и давление были равны соответствующим значениям температуры и давления у поверхности Земли?

2. Герметично закрытая с одного конца трубка опускается в воду закрытым концом сверху и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Длина части трубки, погруженной в воду, $H = 1,75 \text{ м}$, длина всей трубки $L = 2 \text{ м}$. Найдите высоту слоя воды, зашедшей в трубку. Атмосферное давление принять равным давлению, слоя воды высотой $H_0 = 10,5 \text{ м}$.

3. Мыльный пузырь надувается воздухом, температура которого выше комнатной. При диаметре пузыря $d = 0,3 \text{ мм}$ он начинает всплывать (в комнате). На сколько процентов температура воздуха в пузыре выше комнатной? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40 \text{ мН/м}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Массой пленки пренебречь.

4. В лунку кубической формы размером $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$, целиком заполненную водой, опускают цилиндрическое тело (ось цилиндра вертикальна). В результате часть воды из лунки выливается, а тело начинает плавать в ней. После этого из лунки отлили еще $m = 250 \text{ г}$ воды так, что тело стало плавать, касаясь дна лунки. Какая масса воды осталась в лунке? Чему равна плотность материала цилиндра? Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см , высота цилиндра равна его диаметру, плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$.