

Задачи

по математике и физике



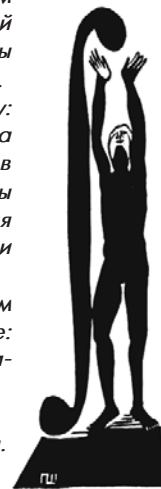
Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1999 года по адресу: 12796 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала и по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в афе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2 — 99» и номера задач, решения которых Вы высылаете, например «М1676» или «Ф1683». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя осим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и обходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном нверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: адачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1677 предлагалась на Московской городской олимпиаде по математике этого года.

Задача Ф1685 предлагалась на втором (очном) туре V Соросовской олимпиады по физике.



Задачи М1676 — М1680, Ф1683 — Ф1687

М1676. Отрезок AB разбит на черные и белые отрезки так, что сумма длин черных равна сумме длин белых отрезков. Для каждого черного отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки A до его середины и все такие произведения суммируем. Для каждого белого отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки B до его середины и все такие произведения тоже суммируем. Докажите, что обе суммы равны.

В.Произволов

М1677. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружность, проходящая через точки A , O и B , касается прямой BC . Докажите, что окружность, проходящая через точки B , O и C , касается прямой CD .

А.Заславский

М1678. В таблице из $n \times n$ клеток ($n \geq 3$) в каждой строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.

В.Произволов

М1679. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа $a_0 > 0$ и $b_0 < 0$. Числа a_{n+1} и b_{n+1} принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному кор-

ням уравнения $x^2 + a_n x + b_n = 0$. Найдите пределы обеих последовательностей.

А.Заславский, А.Поспелов

М1680. Числовая последовательность задается равенством $x_n = n^3 + C$, где n принадлежит натуральному ряду.

а) Пусть C — натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).

б) Пусть C является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в)* Существует ли такое натуральное число C , что любые соседние члены последовательности взаимно просты?

В.Сеидеров

Ф1683. Мотор на берегу равномерно наматывает на вал веревку, с помощью которой подтягивается к берегу лодка. В данный момент веревка составляет угол α с горизонтом, а скорость лодки равна v . На веревке завязан небольшой узелок — в указанный момент он вдвое ближе к носу лодки, чем к валу, на который наматывается веревка. Найдите скорость и ускорение узелка в данный момент времени.

С.Варламов

Ф1684. Для снабжения небольшого дома горячей водой применено не самое удачное устройство. Оно состоит из очень большого бака с теплоизоляцией, от которого потребители получают маленькими порциями горячую воду, и автоматического устройства, которое сразу же пополняет бак крутым кипятком. Оказалось, что при

стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет $+60\text{ }^{\circ}\text{C}$ при температуре окружающего воздуха $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.

А.Зильберман

Ф1685. Оцените, на какой высоте над Землей находится центр тяжести столба воздуха, нависающего над стадионом «Лужники». Когда он расположен выше – летом или зимой? При расчете можно считать, что температура воздуха на любой высоте равна температуре земной поверхности.

А.Чувилов

Ф1686. Сто батареек с одинаковыми параметрами соединили последовательно, при этом двадцать из них оказались подключены с противоположной к остальным полярностью. Концы получившейся цепочки соединили, получив замкнутое кольцо. Параллельно одной из батареек подключили вольтметр (его сопротивление во много раз больше внутреннего сопротивления батарейки), и он показал напряжение $1,6\text{ В}$. Что покажет вольтметр, если его подключить к какой-нибудь другой батарейке?

М.Учителев

Ф1687. Точечный источник света движется с постоянной скоростью v_0 по прямой, составляющей небольшой угол α с главной оптической осью собирающей линзы. Траектория источника пересекается с упомянутой осью на двойном фокусном расстоянии от линзы. Найдите минимальную скорость изображения в линзе относительно движущегося источника.

А.Повторов