

Великолепная десятка

Л. КУРЛЯНДЧИК



ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАС-смотрим несколько задач, в которых изящество результатов сочетается с наличием красивых решений, по-видимому, не известных широкому читателю.

Начнем с задачи, имеющей очень красивый и неожиданный ответ.

Задача 1 (золотое сечение). Дан треугольник ABC . Точки P и Q лежат на сторонах AB и AC соответственно, T – точка пересечения отрезков CP и BQ . Где следует выбрать точки P и Q , чтобы площадь треугольника PQT была наибольшей?

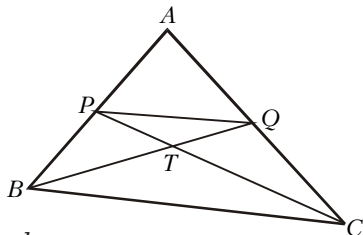


Рис. 1

Решение (векторы). Мы докажем, что площадь треугольника PQT максимальна в случае

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Положим (рис.1)

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{b}, \quad \vec{AC} = \vec{c}, \\ \vec{AP} &= p \cdot \vec{b}, \quad \vec{AQ} = q \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

где $0 < p, q < 1$. Тогда

$$\vec{PC} = \vec{c} - p \cdot \vec{b}, \quad \vec{QB} = \vec{b} - q \cdot \vec{c}.$$

Пусть

$$\vec{BT} = n \cdot \vec{BQ}, \quad \vec{PT} = m \cdot \vec{PC}.$$

Так как

$$\vec{BP} + \vec{PT} = \vec{BT},$$

то

$$(p-1)\vec{b} + m(\vec{c} - p \cdot \vec{b}) = n \cdot (\vec{c} - q \cdot \vec{b}),$$

или

$$(p-1-pm+n)\vec{b} + (m-qn)\vec{c} = \vec{0}.$$

Следовательно,

$$p-1-pm+n = m-qn = 0.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{q(1-p)}{1-pq}, \quad n = \frac{1-p}{1-pq}.$$

Поэтому

$$\vec{TP} = \frac{q(1-p)}{1-pq} (p \cdot \vec{b} - \vec{c}),$$

$$\vec{TQ} = \frac{p(1-q)}{1-pq} (q \cdot \vec{c} - \vec{b}).$$

Итак,

$$S_{PQT} = \frac{1}{2} |\vec{TP} \cdot \vec{TQ}| = \frac{1}{2} f(p, q) |\vec{b} \cdot \vec{c}|,$$

где

$$f(p, q) = \frac{pq(1-p-q+pq)}{1-pq}.$$

Так как

$$p+q \geq 2\sqrt{pq},$$

то

$$\begin{aligned} f(p, q) &\leq \frac{pq(1-2\sqrt{pq}+pq)}{1-pq} = \\ &= \frac{pq(1-\sqrt{pq})}{1+\sqrt{pq}}, \end{aligned}$$

равенство достигается при $p = q$. При помощи дифференцирования легко показать, что при $0 < x < 1$ функция $\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ принимает наибольшее значение при $x^2 + x - 1 = 0$, т.е. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, $f(p, q)$ и, значит, S_{PQT} принимают наибольшее значение в случае $p = q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Следующая задача лишь на первый взгляд выглядит довольно мрачно. Мы приведем два красивых решения этой задачи.

Задача 2 (много корней). Докажите, что для всякого натурального числа $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt{2^3 3^4 4 \dots n^{\sqrt{n}}} < 2.$$

Первое решение (обратная индукция). Докажем более сильное утверждение, а именно, что для всех натуральных чисел $n \geq m \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{m^{m+1}(m+1) \dots \sqrt[n]{n}} < 2.$$

Доказывать будем «обратной индукцией», т.е. сначала для $m = n$, а затем «вниз» до $m = 2$.

Ясно, что $\sqrt[n]{n} < 2$.

Для $m < n$ предположим, что

$$\sqrt[m+1]{(m+1) \dots \sqrt[n]{n}} < 2.$$

Тогда

$$\sqrt[m]{m^{m+1}(m+1) \dots \sqrt[n]{n}} < \sqrt[m]{m \cdot 2} \leq 2.$$

Требуемый результат получаем, полагая $m = 2$.

Второе решение (логарифм). Обозначив левую часть неравенства через p , имеем

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 3}{3!} + \dots + \frac{\ln n}{n!}.$$

Так как $\frac{\ln x}{x}$ убывает при $x \geq 3$, то

$$\begin{aligned} \ln p &= \frac{\ln 2}{2} + \\ &+ \frac{\ln 3}{3} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) < \\ &< \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} (e-2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p < \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{e-2}{3}} \approx 1,8397 < 2.$$

Кстати, в качестве оценки снизу имеем

$$\ln p > \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \frac{\ln 2}{2} + e - \frac{5}{2}.$$

Значит,

$$p > \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx 1,1423.$$

Следующая задача может быть решена при помощи интегрирования, но имеет и весьма красивое элементарное решение.

Задача 3 (проекция). На плоскости расположено конечное число отрезков общей длиной 1. Докажите, что существует такая прямая l , что сумма длин проекций этих отрезков на l меньше, чем $2/\pi$.

Решение (вписанная окружность). Мы передвинем параллельно самим себе все n отрезков так, чтобы их середины совпали в точке V (рис.2).

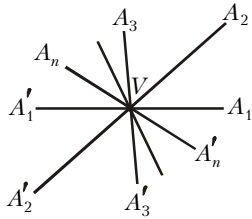


Рис. 2

Обозначим $2n$ полученных концов отрезков

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n.$$

Начиная от некоторой точки P'_n , нарисуем отрезок $P'_n P'_1$, равный и параллельный VA_1 , затем нарисуем отрезок $P'_1 P'_2$, равный и параллельный VA_2 , и так далее; мы получаем точки $P'_3, \dots, P'_n, P'_1, \dots, P'_{n-1}$. В итоге получится (рис.3) выпуклый $2n$ -угольник P с центром симметрии O (потому что пары

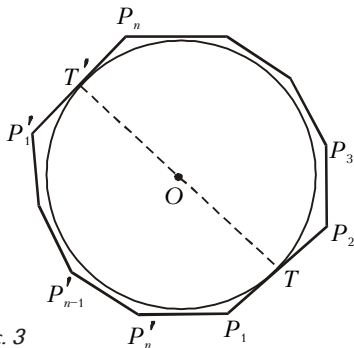


Рис. 3

противоположных сторон этого многоугольника равны и параллельны).

Выберем пару противоположных параллельных сторон, расстояние между которыми d минимально. Рассмотрим окружность с центром в точке O и диаметром d .

Эта окружность касается двух противоположных сторон во внутренних точках T и T' . Следовательно, она целиком лежит внутри многоугольника P . Поэтому

$$\pi d < \text{периметр } P = 1.$$

Значит,

$$d < \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, ортогональные проек-

ции всех $2n$ сторон многоугольника P на прямую TT' имеют общую длину $2d < 2/\pi$, что и требовалось доказать.

Чтобы лучше оценить следующую задачу, попробуйте сначала решить ее самостоятельно.

Задача 4 (циклическая сумма). Пусть n – натуральное число, $n \geq 4$. Найдите наилучшие оценки снизу и сверху для суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}$$

(здесь, конечно, $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$) для всех наборов n вещественных неотрицательных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , в которых по циклу нет трех нулей подряд.

Решение (на границе нуля). Докажем, что

$$1 < \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

причем эти границы являются наилучшими.¹

Пусть S – это данная сумма и $T = \sum_{i=1}^n x_i$. Тогда

$$S > \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \dots + \frac{x_n}{T} = 1.$$

Для того чтобы показать, что 1 – это наилучшая оценка снизу, положим $x_i = \epsilon^{i-n}$, где $0 < \epsilon < 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{\epsilon^{i-n}}{1 + \epsilon^{1-n} + \epsilon^{2-n}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\epsilon^{i-n}}{\epsilon^{i-n-1} + \epsilon^{i-n} + \epsilon^{i-n+1}} + \\ &+ \frac{1}{\epsilon^{-1} + 1 + \epsilon^{1-n}} = \frac{1}{\epsilon^{n-1} + 1 + \epsilon} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\epsilon^{-1} + 1 + \epsilon} + \frac{1}{\epsilon^{-1} + 1 + \epsilon^{1-n}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

Теперь мы докажем, что наилучшая верхняя оценка равна m при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть $n = 2m$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} &\leq \\ &\leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 1 \end{aligned}$$

(здесь, конечно же, использовано ус-

¹ Квадратными скобками обозначена целая часть числа.

ловие $x_1 + x_2 > 0$, но случай $x_1 = x_2 = 0$ очевиден). Аналогичные неравенства справедливы для всех пар последовательных слагаемых. Таким образом, получаем верхнюю оценку m ; она достигается при $x_2 = x_4 = \dots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \dots = x_{2m-1} = 0$.

Пусть $n = 2m + 1$. Без ограничения общности мы можем предположить, что наименьший знаменатель – это $x_1 + x_2 + x_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_{2m+1} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \\ + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} \leq 1. \end{aligned}$$

А теперь достаточно снова воспользоваться тем, что сумма двух последовательных слагаемых не больше 1. При этом верхняя граница m достигается при $x_2 = x_4 = \dots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \dots = x_{2m-1} = 0$.

Результат следующей задачи является первым шагом на пути решения весьма непростой проблемы.

Задача 5 (треугольник из бумаги). Докажите, что любой треугольный кусок бумаги площадью 1 можно согнуть так, что, положенный на стол, он будет занимать площадь меньше, чем

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Первое решение (биссектриса). Пусть ABC – данный треугольник со сторонами $a \leq b \leq c$.

Пусть точка D на стороне BC такова, что AD – это биссектриса угла A . Мы сложим треугольник ABC вдоль отрезка AD . Получившийся треугольник занимает площадь, равную

$$S_{ABD} = \frac{c}{b+c}.$$

Аналогично, если мы сложим треугольник ABC вдоль биссектрисы угла C , то площадь, покрываемая полученной фигурой, равна $\frac{b}{a+b}$.

Таким образом, остается только доказать, что

$$\min\left(\frac{b}{a+b}, \frac{c}{b+c}\right) < \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

или

$$\begin{aligned} \min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right) &< \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - 1\right)^{-1} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = r. \end{aligned}$$

Если $\frac{b}{a} < r$, то все доказано.

Предположим, что $\frac{b}{a} \geq r$. Тогда

$$\frac{c}{b} < \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} \leq 1 + \frac{1}{r} = r.$$

Второе решение (высота и биссектриса). Мы рассмотрим два случая.

$$1) b \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} c.$$

Пусть CH – высота, опущенная из вершины C . Мы сложим кусок бумаги

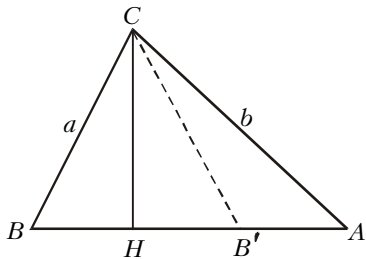


Рис. 4

вдоль CH (рис.4). Нам достаточно доказать, что

$$S_{\text{AHC}} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Так как $AB \cdot HC = 2$, то

$$S_{\text{AHC}} = \frac{HC \cdot HA}{2} < \frac{HC \cdot AC}{2} \leq \frac{HC}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$2) b > \frac{\sqrt{5}-1}{2} c.$$

Пусть AD – биссектриса угла A (рис.5). Мы сложим треугольник ABC

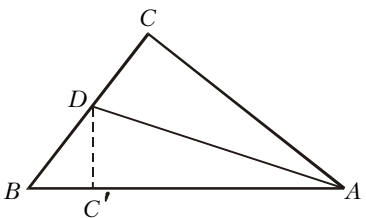


Рис. 5

вдоль AD и, так как точка C' лежит на стороне AB , нам достаточно рассмотреть треугольник ABD . Имеем

$$S_{ABD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}.$$

Так как $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$, то

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD+CD}{BD} = 1 + \frac{b}{c} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Значит,

$$S_{ABD} = \frac{BD}{BC} < \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Естественно возникает вопрос: а какова наилучшая оценка в этой задаче? Оказывается, она равна $2 - \sqrt{2}$.

Следующая задача интересна тем, что в ней будут переплетены алгебра и геометрия.

Задача 6 (сумма корней). Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq 3\sqrt{ab + bc + ca}.$$

Первое решение (сумма трех неравенств). Во-первых,

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Действительно, возводя неравенство в квадрат и перенося все в левую часть, получаем

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Аналогично,

$$\sqrt{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

и

$$\sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a).$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq (a+b+c)\sqrt{3}.$$

Остается доказать, что

$$\sqrt{3}(a+b+c) \geq 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, сократив на 3 и умножив обе части на 2, а затем перенеся все в левую сторону, получаем

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Второе решение (среднее арифметическое и среднее геометрическое). Мы докажем, что

$$\prod (a^2 + ab + b^2) \geq (ab + bc + ca)^3. (1)$$

Из этого неравенства, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\left(\frac{1}{3} \sum \sqrt{a^2 + ab + b^2}\right)^3 \geq \prod \sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq (\sqrt{ab + bc + ca})^3.$$

И сумма и произведение являются циклическими относительно a, b, c . Раскрывая скобки в неравенстве (1), получаем

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 + 2\sum a^3b^2c + \sum a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 \geq \sum a^3b^3 + 3\sum a^3b^2c + 6a^2b^2c^2,$$

или

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c + 3a^2b^2c^2.$$

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом еще раз, имеем

$$\sum a^4bc \geq 3\sum \sqrt{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2.$$

Тем самым, остается доказать, что

$$\sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c.$$

Но

$$2(\sum a^4b^2 - \sum a^3b^2c) = \sum (a^2b - b^2c)^2 \geq 0.$$

Примечание для знатоков. Неравенство (1) можно доказать короче, используя неравенство Гёльдера.

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= (ab)^{1/3}(b^2)^{1/3}(a^2)^{1/3} + \\ &+ (b^2)^{1/3}(bc)^{1/3}(c^2)^{1/3} + \\ &+ (a^2)^{1/3}(c^2)^{1/3}(ac)^{1/3} \leq (ab + b^2 + a^2)^{1/3} \times \\ &\times (b^2 + bc + c^2)^{1/3} \cdot (a^2 + c^2 + ac)^{1/3} = \\ &= \prod (a^2 + ab + b^2)^{1/3}. \end{aligned}$$

Третье решение (площадь треугольника). Докажем более общее неравенство.

Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\sum \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2} \geq \sqrt{6\sqrt{3} \left| \sum ab \sin \gamma \right|}. (2)$$

Пусть P – точка на плоскости. Рассмотрим треугольник ABC , вершины которого находятся на расстояниях a, b, c от точки P , с углами α, β, γ между отрезками PA, PB, PC – так, как это показано на рисунке 6.

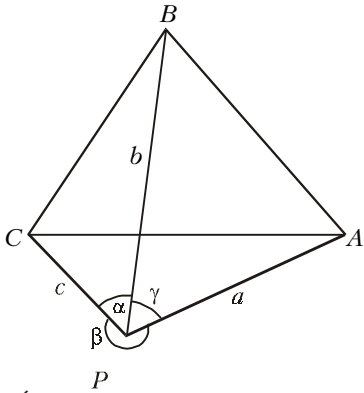


Рис. 6

Тогда

$$AB = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2},$$

и так далее.

Известно, что среди всех треугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Поэтому

$$P \geq 2\sqrt{3\sqrt{3}S}, \quad (3)$$

где P – периметр, а S – площадь треугольника ABC .

Так как

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum ab \sin \gamma \right|,$$

то неравенство (2) следует из неравенства (3).

В следующей задаче красивый факт сочетается с изящным решением.

Задача 7 (касательные к двум окружностям). Проведем четыре общие касательные к двум окружностям и точки касания соединим хордами, как показано на рисунке 7. (Эти хорды

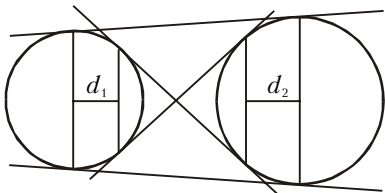


Рис. 7

параллельны, так как они все перпендикулярны линии, соединяющей центры окружностей). Докажите, что $d_1 = d_2$.

Решение (отрезки касательных). Из рисунка 8 имеем

$$\begin{aligned} 2BC + CD &= AB + BD = AB + BH = \\ &= GE + EF = EC + EF = 2ED + CD. \end{aligned}$$

Следовательно, $BC = ED$, и значит, $AB = EF = IH$. Из этих равенств следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Поэтому

$$d_1 = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = d_2.$$

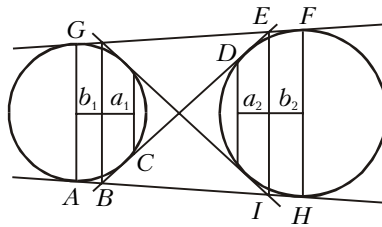


Рис. 8

Следующую задачу, конечно же, нельзя назвать малоизвестной, но я не могу удержаться, чтобы не привести ее красивое решение.

Задача 8 (двойная сумма). Докажите, что для любых вещественных чисел a_1, a_2, \dots, a_n справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

Решение (интеграл). Рассмотрим многочлен

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x^{i+j-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} xp(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x^{i+j} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j x^j \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

для всех вещественных x .

В частности, $p(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 p(x) dx &= \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j} \Big|_0^1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j}. \end{aligned}$$

Неравенство строгое, за исключением случая $xp(x) \equiv 0$, т.е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Задача 9 (четыре окружности).

На рисунке 9 точки A и B – центры больших окружностей. Из точек C и D проведены касательные. Докажите, что маленькие вписанные окружности имеют одинаковые радиусы.

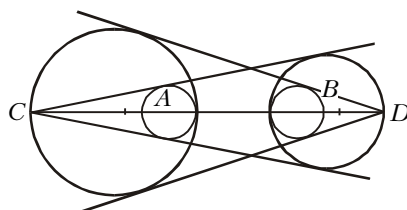


Рис. 9

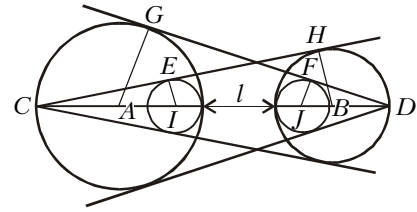


Рис. 10

Первое решение (подобие). Пусть R_a и R_b – радиусы больших окружностей, r_a и r_b – радиусы маленьких окружностей. Так как $\triangle CEI \sim \triangle CHB$ (рис.10), то отсюда

$$r_a = \frac{2R_a R_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Так как

$$\triangle DFI \sim \triangle DGA,$$

то аналогично получаем, что

$$r_b = \frac{2R_a R_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Второе решение (подобие). Так как в подобных треугольниках CC_1C_2 и $CC_1'C_2'$ (рис.11) радиусы вписанных

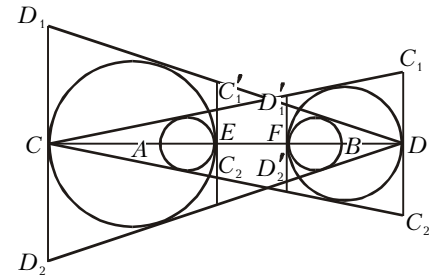


Рис. 11

окружностей пропорциональны высотам, то

$$\frac{R_b}{r_a} = \frac{CD}{CE},$$

или

$$r_a = \frac{CE \cdot R_b}{CD} = \frac{2R_b R_a}{CD}.$$

Аналогично, для треугольников DD_1D_2 и $DD_1'D_2'$ имеем

$$r_b = \frac{DF \cdot R_a}{CD} = \frac{2R_b R_a}{CD}.$$

Следующая задача тоже довольно известная, но наличие у нее большого числа симпатичных решений позволяет ей занять место в десятке.

Задача 10 (равные углы). В треугольнике ABC точки N, L, M , в данном порядке лежащие на стороне AC , являются, соответственно, основаниями

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с.28)

высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B . Известно, что углы ABN , NBL , LBM , MBC равны. Найдите углы треугольника ABC .

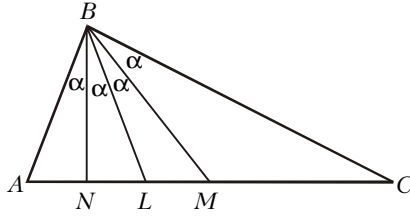


Рис. 12

Первое решение (теорема синусов).

Положим $\alpha = \angle ABN$ (рис.12). Тогда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем

$$BM = \frac{AM \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin 3\alpha} = \frac{AM \cos \alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$BM = \frac{CM \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}{\sin \alpha} = \frac{CM \cos 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Так как $AM = CM$, то

$$\frac{\cos \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Отсюда $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$, или $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то получаем, что

$$\alpha = \frac{\pi}{8}. \text{ Поэтому } \angle A = \frac{3\pi}{8}, \angle B = \frac{\pi}{2}, \angle C = \frac{\pi}{8}.$$

Второе решение (описанная окружность). Пусть O – центр описанной около треугольника ABC окружности и BD – диаметр этой окружности. Так как $\angle BAC = \angle BDC$, то $\angle ABN = \angle CBO$. Следовательно, лучи BM и BO совпадают. Если $O \neq M$, то, так как отрезок OM перпендикулярен AC , медиана BM в этом случае совпадает с высотой BN , в противоречии с условием задачи. Итак, $O = M$ и угол B – прямой. Но тогда $\angle ABN = \frac{\pi}{8}$, $\angle BAC = \frac{3\pi}{8}$ и $\angle BCA = \frac{\pi}{8}$.

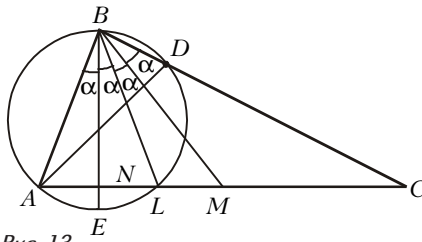


Рис. 13

Третье решение (два диаметра).

Проведем окружность через точки A, B, L (рис.13). Центр этой окружности O лежит на луче BN . Пусть BE – диаметр этой окружности, D – точка пересечения окружности со стороной BC . Так как

$$\angle BAD = \angle BED = \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \angle BCA,$$

то треугольники DBA и ABC подобны. Следовательно, они делятся одинаковым образом тремя линиями, исходящими из вершины B . Поэтому точка X пересечения отрезков BE и AD должна быть серединой отрезка AD . Итак, диаметр BE делит хорду AD пополам. А это возможно лишь в следующих двух случаях: либо диаметр и хорда перпендикулярны (что явно не выполняется в нашей ситуации), либо хорда сама является диаметром и точка пересечения – центр окружности. Итак, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Четвертое решение (описанная окружность). Пусть P – точка пересече-

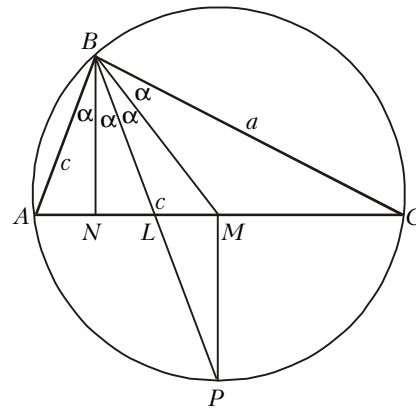


Рис. 14

ния луча BL с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис.14). Следовательно, точка P – середина дуги AC . Поэтому $MP \perp AC$ и, значит, $BN \parallel MP$. Следовательно,

$$\angle MBP = \angle NBL = \angle MPB.$$

Поэтому $MB = MP$. Тем самым, M – точка пересечения серединных перпен-

дикулярных отрезков BP и AC и, значит, M – центр описанной около треугольника ABC окружности. Поэтому AC – это диаметр и угол ABC равен $\frac{\pi}{2}$.

Пятое решение (площадь). Применяя теорему синусов к треугольнику BML , имеем

$$\frac{BM}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{BL}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{c}{\cos 2\alpha}.$$

Поэтому

$$BM = \frac{c \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{BMC} = BM \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{c \cos \alpha}{\cos 2\alpha} a \sin \alpha = \frac{ac \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 4\alpha = \frac{ac \sin 4\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Отсюда $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 0.$$

Поэтому $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

В заключение я хочу принести свою искреннюю благодарность математику из Эссена (Германия) Йоахиму Зукку – благодаря ему я имел возможность ознакомиться с материалами, при помощи которых была написана эта статья.

