Палочка продолжает падать ...

А.ЧЕРНОУЦАН

В ОДНОМ ИЗ ПРЕДЫДУЩИХ номеров «Кванта» (№4 за 1998 г.) в разделе «Физический факультатив» была напечатана заметка «Куда проскользнет палочка?». В ней рассматривалась задача о тонкой палочке, падающей из вертикального положения на горизонтальную плоскость. А именно, обсуждался вопрос, куда проскользнет нижний конец палочки: в сторону падения или в противоположную сторону?

Эта задача заинтересовала меня довольно давно, более десяти лет назад, когда я решал со своими студентами олимпиадные задачи. Задача выглядела новой и интересной, при этом интуитивно чувствовалось, что ответ должен зависеть от коэффициента трения. Действительно, при очень слабом трении проскальзывание должно начаться почти сразу, причем в сторону, противоположную падению (как на гладкой плоскости). При сильном трении палочка к моменту проскальзывания успевает приобрести горизонтальный импульс и может «потащить» нижний конец в сторону падения.

К радости моей и студентов выяснилось, что задача эта решается точно, а полученное решение полностью подтвердило все предположения. «Критический» коэффициент трения, при котором меняется направление проскальзывания, оказался равным $\mu = 15\sqrt{10}/128 \approx 0{,}37$. Обнаружились и другие, достаточно неожиданные, свойства падающей палочки. Например, что при любом сколь угодно большом коэффициенте трения палочка начнет обязательно проскальзывать, причем при угле отклонения от вертикали, меньшем $\arccos(1/3) \approx 70{,}5°$. Обо всем этом и рассказывалось в упомянутой статье.

Однако возникли новые обстоятельства, которые заставили меня взяться за вторую статью о падающей палочке. Во-первых, пришел из США очередной номер журнала-побратима «Кванта» – американского «Квантума» (март/апрель 1998 г.). Большая часть журнала состояла, как обычно, из переведенных на английский язык статей из «Кванта», но были там и новые статьи. Среди них – статья, написанная американским физиком-теоретиком Лифом Тернером и его ученицей Джейн Пратт и посвященная... падающей палочке! (Недаром говорят, что физика не знает границ.) Оказывается, некоторое время назад они придумали задачу о палочке, решили ее и сразу же написали об этом в «Квантум». Правда, во главу угла авторы поставили вопрос не о направлении проскальзывания (на этот вопрос они тоже ответили), а о возможности отрыва от пола нижнего конца палочки, и очень красивым способом доказали, что конец палочки будет скользить без отрыва до самого ее падения. Мне так понравились их рассуждения, что захотелось рассказать (с некоторыми упрощениями) об этом нашим читателям. Тем более, что сам я даже не брался за рассмотрение движения после начала скольжения, так как считал его очень сложным (в частности, потому, что механическая энергия больше не сохраняется).

Во-вторых, просматривая мой любимый «Задачник Буховцева» («Сборник задач по элементарной физике», авторы Б.Б.Буховцев, В.Д.Кривченков, Г.Я.Мякишев, И.М.Сараева; М.: Наука, 1987), я натолкнулся на давно забытую задачу:

196. *На конце легкого стержня, поставленного вертикально на пол, закреплен массивный шар. Стержень начинает падать без начальной скорости. При каком значении угла между стержнем и вертикалью конец стержня перестанет давить на пол? При каком значении коэффициента трения стержень не проскользнет до этого момента?*

Решение этой задачи опирается на интуитивное предположение, что полная сила реакции пола $\vec{R}$ направлена вдоль стержня (рис.1). Правда, это утверждение является точным только в том случае, если на конце стержня закреплен не шар конечного радиуса, а материальная точка, но для маленького шара эта неточность кажется несущественной.

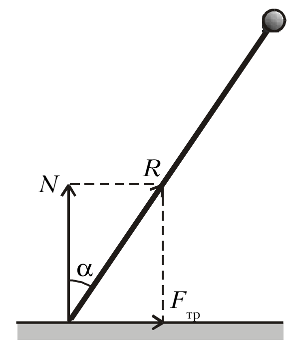

Рис. 1

Движение шара описывается уравнениями

$$mg\cos\alpha - R = \frac{mv^2}{l},$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha),$$

где m – масса шара, v – его линейная скорость, l – длина стержня. Если положить $R = 0$, то получим $\cos\alpha_1 = 2/3$. Чтобы стержень до этого момента не начал проскальзывать, при $\alpha < \alpha_1$ должно выполняться неравенство $F_{тр} < \mu N$. Иными словами, проскальзывания не будет, если $\mu > \operatorname{tg}\left(\arccos(2/3)\right) = \sqrt{5}/2$.

Получается, что судьба падающего стержня существенно зависит от распределения массы вдоль его длины. Однородная палочка обязательно начнет проскальзывать, но никогда не оторвется от пола, а невесомый стержень с точечной массой на конце от пола отрывается. Чтобы разобраться подробнее, запишем уравнения динамики для тонкого падающего стержня с произвольным распределением массы вдоль его длины и изучим вопрос о начале проскальзывания. Следующим пунктом нашей программы будет изучение падения такой «обобщенной» палочки после начала скольжения (следуя идеям Лифа и Джейн).

С точки зрения динамики, свойства такого линейного объекта полностью определяются его массой m, расстоянием d от нижнего конца до центра масс и моментом инерции I_0 относительно центра масс. Однако можно вместо этих параметров ввести один безразмерный параметр: $\gamma = \dfrac{I_0}{md^2}$, который будет полностью определять свойства нашего стержня. Момент инерции стержня относительно точки касания равен

$I = I_0 + md^2 = (\gamma + 1)md^2$. Для точечной массы на конце стержня $\gamma = 0$, а для однородного стержня $\gamma = 1/3$.

А в каких пределах может изменяться параметр γ? Рассмотрим невесомый стержень с точечными массами на его концах. Меняя величины масс m_1 (внизу), m_2 (вверху) и длину стержня l, можно получить все возможные значения параметров m, d, I_0 и γ (для данного случая $\gamma = m_1/m_2$, проверьте это самостоятельно). Например, гантелька с массой $m/4$ внизу и $3m/4$ наверху будет полностью эквивалентна однородной палочке. Видно, что параметр γ может принимать любые положительные значения.

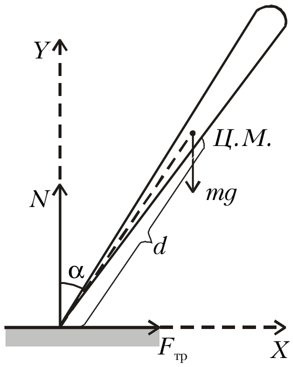

Рис. 2

Итак, запишем закон динамики вращательного движения стержня относительно нижней точки (рис.2):

$$mgd\sin\alpha = \left(I_0 + md^2\right)\varepsilon,$$

или

$$g\sin\alpha = (\gamma + 1)\varepsilon d,$$

и закон сохранения энергии:

$$mgd(1 - \cos\alpha) = \left(I_0 + md^2\right)\frac{\omega^2}{2},$$

или

$$g(1 - \cos\alpha) = (\gamma + 1)\frac{\omega^2 d}{2},$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ – угловое ускорение. Выразим проекции ускорения центра масс a_x и a_y на горизонтальную и вертикальную оси через линейное ускорение εd и центростремительное ускорение $\omega^2 d$:

$$a_x = d\left(\varepsilon\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha\right),$$
$$a_y = -d\left(\varepsilon\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha\right). \qquad (1)$$

Теперь с помощью законов Ньютона

$$F_{тр} = ma_x, N - mg = ma_y \qquad (2)$$

найдем зависимости $F_{тр}$ и N от угла α:

$$F_{тр} = \frac{3mg}{\gamma + 1}\sin\alpha\cdot\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$N = \frac{3mg}{\gamma + 1}\left(\cos^2\alpha - \frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{\gamma}{3}\right).$$

Чтобы выяснить условия начала проскальзывания, надо исследовать поведение функции

$$\mu = \left|\frac{F_{тр}}{N}\right| = \left|\frac{\sin\alpha\cdot\left(\cos\alpha - \dfrac{2}{3}\right)}{\cos^2\alpha - \dfrac{2}{3}\cos\alpha + \dfrac{\gamma}{3}}\right|.$$

Качественно поведение этой функции представлено графически на рисунке 3. (Для нахождения экстремумов функции надо приравнять к нулю производную этой функции. Убедитесь сами, что получается квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$.) Интервалы функции, соответствующие проскальзыванию, выделены более жирными линиями, а интервалы углов – штриховкой на оси абсцисс. Левая область соответствует проскальзыванию против направления падения ($\mu < \mu_1$), а правая – проскальзыванию в сторону падения ($\mu > \mu_1$).

При $0 < \gamma < 1/3$ (рис.3,*а*) проскальзывание начнется при любом сколь угодно большом значении коэффициента трения μ, причем при угле, меньшем некоторого α_0. (При $\gamma \to 0$ угол $\alpha_0 \to \alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48{,}2°$, а при $\gamma = 1/3$ угол $\alpha_0 = \alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 70{,}5°$.) Поведение стержня получается качественно таким же, как и падающей палочки. При $\gamma > 1/3$ функция остается конечной при всех α (рис. 3, *б*,*в*). Значит, при достаточно большом

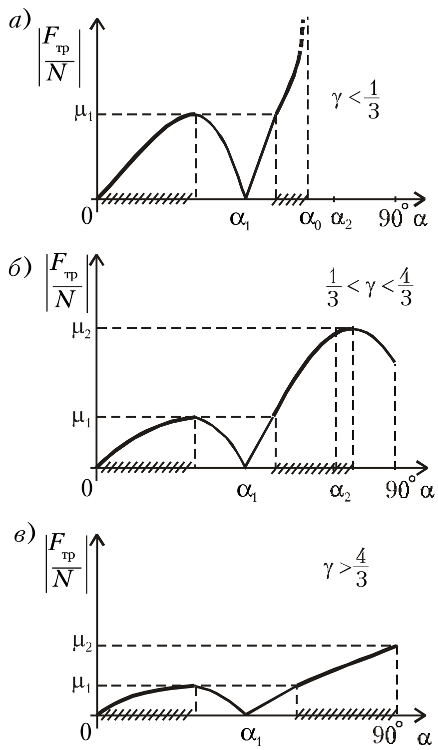

Рис. 3

коэффициента трения ($\mu > \mu_2$) проскальзывания не будет вовсе.

Отметим, что при $\gamma \to 0$, что соответствует переходу к задаче, рассмотренной в «Задачнике Буховцева», проскальзывание начнется при любом μ, причем для $\mu > \sqrt{5}/2$ проскальзывание будет происходить в сторону падения и начнется при угле, чуть большем $\arccos(2/3)$. Впрочем, значения сил $F_{тр}$ и N в момент начала проскальзывания будут очень малыми.

Что же будет происходить после начала скольжения? Как убедиться в том, что нижний конец стержня будет скользить, не отрываясь от пола? Смещение нижнего конца стержня не повлияет на второе из уравнений (1), и после подстановки a_y во второе из уравнений (2) получим

$$N - m\left(g - \omega^2 d\cos\alpha\right) = -md\varepsilon\sin\alpha. \qquad (3)$$

Запишем теперь закон динамики вращательного движения относительно центра масс стержня:

$$Nd\sin\alpha - F_{тр}d\cos\alpha = I_0\varepsilon,$$

или

$$N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = \gamma md\varepsilon.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \pm\mu N$ (верхний знак соответствует скольжению против направления падения), получим

$$N(\sin\alpha \mp \mu\cos\alpha) = \gamma md\varepsilon. \qquad (4)$$

Отметим, что выражение в скобках в момент начала проскальзывания положительно и, значит, не может обратиться в ноль и изменить знак при увеличении α.

Из уравнений (3) и (4) выразим N:

$$N = \frac{m\gamma\left(g - \omega^2 d\cos\alpha\right)}{\gamma + \sin\alpha\cdot(\sin\alpha \mp \mu\cos\alpha)}.$$

Видно, что, для того чтобы N обратилась в ноль (произошел отрыв), должно обратиться в ноль выражение $W(\alpha) = g - \omega^2 d\cos\alpha$. Так как в начале проскальзывания это выражение положительно, при обращении в ноль оно должно убывать, т.е. $dW/d\alpha < 0$. Однако

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{d\left(\omega^2\right)}{d\alpha}d\cos\alpha + \omega^2 d\sin\alpha.$$

Поскольку $d\left(\omega^2\right)/d\alpha = 2\omega(d\omega/d\alpha) = 2(d\alpha/dt)(d\omega/d\alpha) = 2(d\omega/dt) = 2\varepsilon$, а из выражения (4) следует, что ε обращается в ноль одновременно с N, то в момент отрыва $dW/d\alpha = \omega^2 d\sin\alpha > 0$. Из полученного противоречия следует, что N не может обратиться в ноль, т.е. отрыв невозможен!