

представлено в виде $K_{i\min} = \delta Mga$, где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Найдите коэффициент δ , выразив его через угол наклона θ и коэффициент r .

д) (2 балла) Если выполнено условие пункта с), то кинетическая энергия K_i будет приближаться к постоянной величине K_{i0} по мере того, как призма катится вниз по наклонной плоскости. Приняв, что этот предел существует, покажите, что K_{i0} можно записать в виде $K_{i0} = kMga$, и найдите коэффициент k , выразив его через θ и r .

е) (2 балла) Вычислите с точностью до $0,1^\circ$ значение минимального угла наклона θ_0 , при котором неравномерное качение, начавшись, будет продолжаться бесконечно.

Задача 2. Вода под ледяным щитом

Ледяной щит – это толстый слой льда (толщиной до нескольких километров), который покоится на поверхности земли, простираясь горизонтально на десятки и сотни километров. В данной задаче рассматривается таяние льда и поведение воды под слоем льда, находящимся при температуре, близкой к точке плавления. Будем считать, что в таких условиях лед создает давление как вязкая жидкость, но деформируется как хрупкий материал, главным образом – путем вертикального смещения. Для решения данной задачи вам известны следующие данные: плотность воды $\rho_v = 1,000 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 0,917 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость льда $c_l = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления льда $L_l = 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, плотность пород и магмы $\rho = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость пород и магмы $c = 700 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления пород и магмы $L = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, температура плавления льда $t_l = 0^\circ \text{C}$ (она постоянна), средняя мощность теплового потока через поверхность земли $J = 0,06 \text{ Вт/м}^2$.

а) (0,5 балла) Рассмотрите толстый слой льда, расположенный на поверхности земли, через которую поступает средний поток тепла. Пользуясь данными, вычислите толщину d тающего за год слоя льда.

б) (3,5 балла) Рассмотрим теперь верхнюю поверхность щита. Пусть поверхность земли наклонена под углом α к горизонту, а верхняя поверхность щита образует угол β с горизонтом, как показано на рисунке 2. Толщина льда в точке $x = 0$ равна h_0 . Таким образом, нижняя и верхняя поверхности щита могут быть описаны уравне-

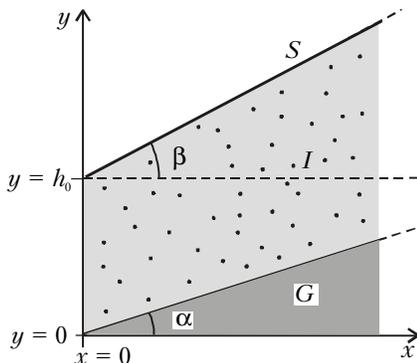


Рис. 2. Поперечное сечение ледяного щита над наклонной земной поверхностью; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит

ниями $y_1 = xt\alpha$, $y_2 = h_0 + xt\beta$. Получите формулу для давления p у нижней кромки щита в зависимости от горизонтальной координаты x . Найдите соотношение между углами β и α , при котором вода в слое между льдом и землей не будет двигаться ни в одном направлении. Покажите, что это условие имеет вид $\text{tg}\beta = s\text{tg}\alpha$, и найдите коэффициент s .

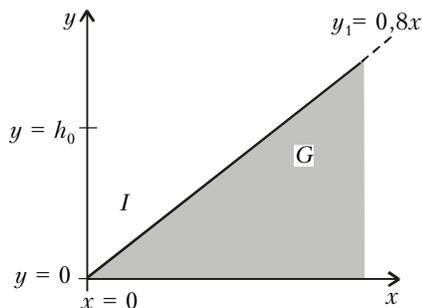


Рис. 3. Поперечное сечение ледяного щита, покоящегося на наклонной поверхности земли; вода под щитом находится в состоянии равновесия; G – земля, I – ледяной щит

Линия, описываемая уравнением $y_1 = 0,8x$ на рисунке 3, показывает поверхность земли под ледяным щитом. Толщина льда при $x = 0$ равна $h_0 = 2 \text{ км}$. Полагая, что вода под щитом находится в равновесии, изобразите на графике линию y_2 и добавьте линию y_1 , показывающую верхнюю поверхность льда.

с) (1 балл) Внутри толстого слоя льда, находящегося на горизонтальной поверхности земли, первоначально имевшем постоянную толщину $D = 2,0 \text{ км}$, в результате таяния льда внезапно формируется коническая полость высотой $H = 1,0 \text{ км}$ и радиусом $r = 1,0 \text{ км}$, полностью заполненная водой (рис. 4). Будем считать, что остальной лед реагирует на образование этой полости только вертикальным смещением. Запишите аналитическое вы-

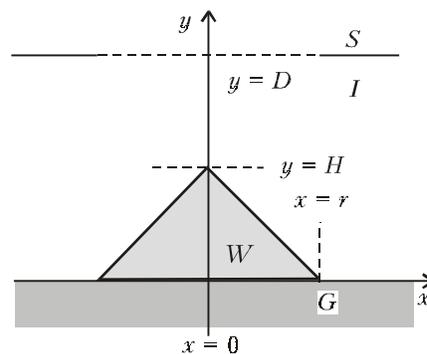


Рис. 4. Вертикальный разрез по средней плоскости водяного конуса внутри ледяного щита; S – поверхность льда, W – вода, G – земля, I – ледяной щит

ражение для формы верхней поверхности ледяного щита после установления гидростатического равновесия и изобразите эту поверхность.

д) (5 баллов) Ежегодная экспедиция международной группы ученых исследует ледовый щит в одном из районов Антарктики. Обычно этот район представляет из себя обширное плато, но в

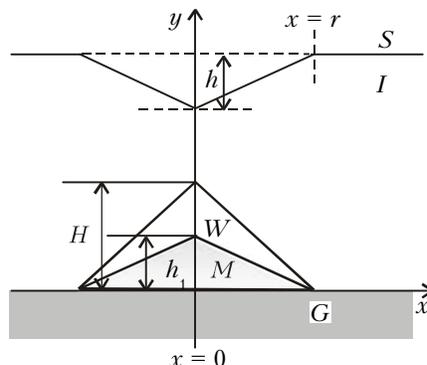


Рис. 5. Вертикальное центральное сечение конической впадины в ледяном щите; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит, M – магма, W – вода

этот раз ученые обнаружили глубокую кратерообразную впадину в форме перевернутого конуса глубиной $h = 100 \text{ м}$ и радиусом $r = 500 \text{ м}$ (рис. 5). Толщина льда в этом месте 2000 м . После дискуссии ученые пришли к выводу, что скорее всего под щитом произошло небольшое вулканическое извержение. Небольшой объем магмы (расплавленной породы) проник через нижнюю кромку ледяного щита, затвердел и остыл, растопив некоторое количество льда. Ученые пытаются оценить объем этого «вторжения» (проникновение магмы под ледяной щит) и объяснить, что произошло с расплавленной водой, следующим образом.

Предположим, что лед двигался только вертикально. Будем считать также, что вначале магма была в полностью расплавленном состоянии при темпера-