

Законы Паскаля и Архимеда

А. ШЕРОНОВ



О ЗАКОНУ ПАСКАЛЯ, ДАВЛЕНИЕ в окрестности некоторой точки, находящейся в жидкости или газе, передается во все стороны без изменений. В соответствии с законом Архимеда, на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости или газа, вытесненного этим телом. В поле тяжести в жидкостях или газах давление в точках, отличающихся по высоте на h , изменяется на ρgh , где ρ – плотность жидкости или газа, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим теперь некоторые характерные примеры использования законов Паскаля и Архимеда при решении задач.

Задача 1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа (CO_2), температура которого вблизи поверхности планеты $T = 800 \text{ К}$, а плотность $\rho = 6,6 \text{ г/л}$. Оцените запасы CO_2 на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $r = 6300 \text{ км}$. Какой толщины была бы атмосфера Венеры, если бы она была равноплотной с давлением и температурой газа, равными их значениям у поверхности планеты? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8,2 \text{ м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, молярная масса углекислого газа $M = 44 \text{ г/моль}$.

По уравнению состояния идеального газа, давление у поверхности Венеры равно $p = \rho RT/M$. Это же давление равно весу атмосферы, деленному на площадь поверхности планеты: $p = mg/(4\pi r^2)$. Отсюда находим массу углекислого газа:

$$m = \frac{4\pi r^2 \rho RT}{Mg} \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ кг.}$$

В равноплотной атмосфере толщиной h давление у поверхности (на глубине h) равно ρgh . Сравнивая это

выражение с уравнением состояния, находим толщину равноплотной атмосферы:

$$h = \frac{RT}{Mg} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ м.}$$

Задача 2. Мыльный пузырь наддувают азотом. При какой величине диаметра пузыря он начнет всплывать в атмосферном воздухе той же температуры? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 45 \text{ мН/м}$, молярная масса воздуха $M_{\text{в}} = 29 \text{ г/моль}$, азота $M_{\text{а}} = 28 \text{ г/моль}$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, массой пленки пренебречь.

Азот внутри мыльного пузыря находится под избыточным, по сравнению с атмосферным, давлением $\Delta p = 8\sigma/d$, где d – диаметр пузыря. Этот результат проще всего получить, если мысленно разрезать пузырь на две равные половинки плоскостью, проходящей через его центр, и рассмотреть условие равновесия этих половинок. Если избыточное давление в пузыре равно Δp , то половинки отрываются друг от друга с силой $\Delta p \pi d^2/4$. С другой стороны, они притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения мыльной пленки, действующими на длине окружности πd и равными $2\sigma \pi d$ (коэффициент «2» учитывает наличие двух поверхностей у пленки). Сравнение этих двух сил и дает величину избыточного давления под пленкой: $\Delta p = 8\sigma/d$.

Пузырь всплывет при условии, что выталкивающая сила, равная весу вытесненного пузырями воздуха при атмосферном давлении p_0 , больше веса азота, находящегося внутри пузыря под давлением $p_0 + \Delta p$. По уравнению состояния газа,

$$\frac{M_{\text{в}} p_0 \pi d^3}{6RT} \geq \frac{M_{\text{а}} (p_0 + \Delta p) \pi d^3}{6RT},$$

откуда находим

$$d \geq \frac{8\sigma M_{\text{а}}}{p_0 (M_{\text{в}} - M_{\text{а}})} \approx 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 3. Батискаф представляет собой шар радиусом $r = 2 \text{ м}$. При испытаниях в море в нижней части батискафа образовалась течь, и он затонул, а в его верхней части образовалась воздушная прослойка в виде шарового сегмента толщиной $h = 1 \text{ м}$. Чему равна глубина моря H , на которой затонул батискаф? Какая масса воздуха понадобится для того, чтобы вытеснить из батискафа всю воду? Начальное (атмосферное) давление воздуха в батискафе равно давлению, которое создает слой воды толщиной $H_0 = 10 \text{ м}$. Указание: объем шарового сегмента толщиной h равен $\Delta V = \pi h^2(3r - h)/3$.

Свободная поверхность воды внутри батискафа горизонтальна. Давление вблизи нее, равное давлению воздуха в батискафе, меньше давления в нижней части батискафа (точка A на рисунке 1) на величину $\rho g(2r - h)$, где $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды. В свою очередь, давление в точке A (дно

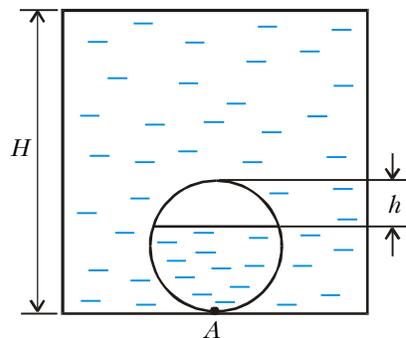


Рис. 1

водоема) складывается из атмосферного давления и давления слоя воды толщиной H . Чтобы найти глубину водоема, необходимо для воздуха, находящегося внутри батискафа (его масса по условию не изменилась), записать закон Бойля – Мариотта:

$$\begin{aligned} \rho g(H_0 + H - (2r - h)) \cdot \Delta V &= \\ &= \rho g H_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

По условию, $h = r/2$, поэтому окончательно находим

$$H = \frac{27}{5} H_0 + \frac{3}{2} r = 57 \text{ м.}$$

Чтобы найти массу воздуха, необходимую для вытеснения из батискафа воды, учтем, что в конце, когда воздух заполняет весь объем батискафа, его давление превышает атмосферное на ρgH . Из уравнения состояния нахо-