Предположим, что $\frac{b}{a} \ge r$. Тогда

$$\frac{c}{b} < \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} \le 1 + \frac{1}{r} = r.$$

Второе решение (высота и биссектриса). Мы рассмотрим два случая.

1) $b \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть CH – высота, опущенная из вершины C. Мы сложим кусок бумаги

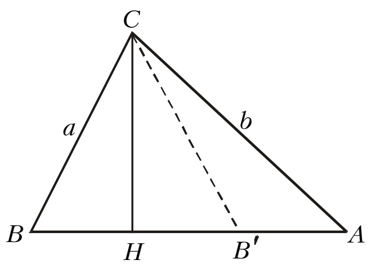

Рис. 4

вдоль CH (рис.4). Нам достаточно доказать, что

$$S_{AHC} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Так как $AB \cdot HC = 2$, то

$$S_{AHC} = \frac{HC \cdot HA}{2} < \frac{HC \cdot AC}{2} \le \frac{HC}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2) $b > \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть AD – биссектриса угла A (рис.5). Мы сложим треугольник ABC

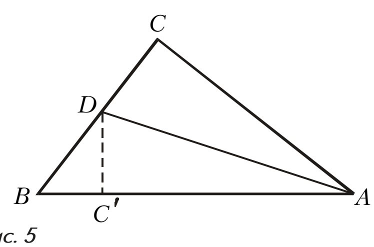

Рис. 5

вдоль AD и, так как точка C' лежит на стороне AB, нам достаточно рассмотреть треугольник ABD. Имеем

$$S_{ABD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}.$$

Так как $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$, то

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD+CD}{BD} = 1 + \frac{b}{c} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Значит,

$$S_{ABD} = \frac{BD}{BC} < \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Естественно возникает вопрос: а какова наилучшая оценка в этой задаче? Оказывается, она равна $2 - \sqrt{2}$.

Следующая задача интересна тем, что в ней будут переплетены алгебра и геометрия.

Задача 6 (сумма корней). *Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство*

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} + \sqrt{c^2+ca+a^2} \ge 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Первое решение (сумма трех неравенств). Во-первых,

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Действительно, возводя неравенство в квадрат и перенося все в левую часть, получаем

$$(a-b)^2 \ge 0.$$

Аналогично,

$$\sqrt{b^2+bc+c^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

и

$$\sqrt{c^2+ca+a^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a).$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} + \sqrt{c^2+ca+a^2} \ge (a+b+c)\sqrt{3}.$$

Остается доказать, что

$$\sqrt{3}(a+b+c) \ge 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, сократив на 3 и умножив обе части на 2, а затем перенеся все в левую сторону, получаем

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0.$$

Второе решение (среднее арифметическое и среднее геометрическое). Мы докажем, что

$$\prod\left(a^2+ab+b^2\right) \ge (ab+bc+ca)^3. \quad (1)$$

Из этого неравенства, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\left(\frac{1}{3}\sum\sqrt{a^2+ab+b^2}\right)^3 \ge \prod\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \left(\sqrt{ab+bc+ca}\right)^3.$$

И сумма и произведение являются циклическими относительно a, b, c. Раскрывая скобки в неравенстве (1), получаем

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 + 2\sum a^3b^2c + \sum a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 \ge$$

$$\ge \sum a^3b^3 + 3\sum a^3b^2c + 6a^2b^2c^2,$$

или

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 \ge \sum a^3b^2c + 3a^2b^2c^2.$$

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом еще раз, имеем

$$\sum a^4bc \ge 3\sum\sqrt{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2.$$

Тем самым, остается доказать, что

$$\sum a^4b^2 \ge \sum a^3b^2c.$$

Но

$$2\left(\sum a^4b^2 - \sum a^3b^2c\right) = \sum\left(a^2b - b^2c\right)^2 \ge 0.$$

Примечание для знатоков. Неравенство (1) можно доказать короче, используя неравенство Гёльдера.

$$ab+bc+ca = (ab)^{1/3}\left(b^2\right)^{1/3}\left(a^2\right)^{1/3} + \left(b^2\right)^{1/3}(bc)^{1/3}\left(c^2\right)^{1/3} +$$

$$+ \left(a^2\right)^{1/3}\left(c^2\right)^{1/3}(ac)^{1/3} \le \left(ab+b^2+a^2\right)^{1/3} \times$$

$$\times \left(b^2+bc+c^2\right)^{1/3} \cdot \left(a^2+c^2+ac\right)^{1/3} = \prod\left(a^2+ab+b^2\right)^{1/3}.$$

Третье решение (площадь треугольника). Докажем более общее неравенство.

Если α, β, $\gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\sum\sqrt{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2} \ge \sqrt{6\sqrt{3}\left|\sum ab\sin\gamma\right|}. \quad (2)$$

Пусть P – точка на плоскости. Рассмотрим треугольник ABC, вершины которого находятся на расстояниях a, b, c от точки P, с углами α, β, γ между отрезками PA, PB, PC – так, как это показано на рисунке 6.