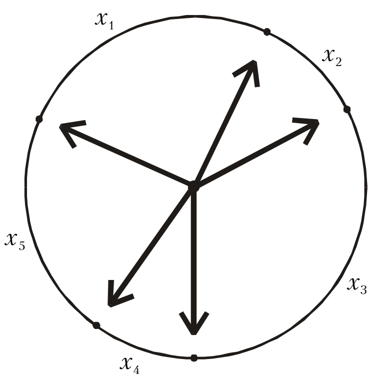

Ответ: за 24 часа. Отметим на циферблате положения часовых стрелок всех пяти часов (см. рисунок). Циферблат разобьется на пять секторов. Занумеруем их по кругу. Пусть часовая стрелка проходит секторы за x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 часов соответственно. (Некоторые из этих чисел, возможно, нулевые; сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ равна 12 часам.)

Чтобы перевести все часы на начало первого сектора, необходимо затратить $S_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_4 + x_5) + x_5 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$ часов. Аналогично можно посчитать величины S_2, S_3, S_4 и S_5, где S_i – время, необходимое для установки всех часов на начало i-го сектора. Следовательно, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 10 \cdot 12 = 120$ часов; наименьшая из величин S_i не превосходит $120 : 5 = 24$ часа.

С другой стороны, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ (например, если часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам. Менее чем 24 часами в такой ситуации не обойтись.

О.Подлипский

М1654. *Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравнобедренного треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E. Докажите, что угол BED прямой.*

Первое решение. Обозначим $O = LD \cap ME$, и пусть точка O лежит внутри треугольника ABC (именно такое расположение было предложено рассмотреть на олимпиаде). ME – медиана треугольника MBC (рис.1), а значит, и треугольника MDL, т.е. $OL = OD$. Далее, $\angle DLB = \angle LBC$, $\angle MEL = \angle ABL = \angle LBC$. Получили: $\angle MEL = \angle DLB$, $OL = OE$.

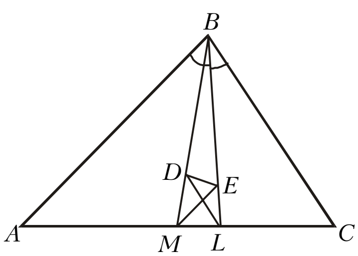

Рис.1

Итак, в треугольнике LED медиана EO равна половине стороны LD. Следовательно, угол DEL прямой, откуда сразу следует утверждение задачи.

Случай внешнего расположения точки O рассматривается аналогично. А можно и не рассматривать этот случай, а просто сослаться на такое почти очевидное предложение.

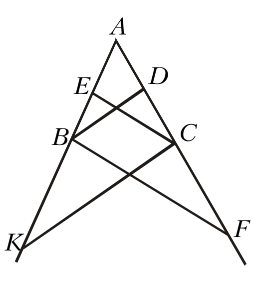

Рис.2

Лемма. Пусть B и C – произвольные точки на выходящих из A лучах (рис.2), $BD \| CK$, $CE \| BF$. Тогда и $ED \| KF$.

Доказательство следует из теоремы Фалеса; легко получить его и с помощью векторов.

С помощью векторов нетрудно получить и естественное решение исходной задачи.

Второе решение. Ниже мы будем рассматривать векторы в базисе $\{\vec{a}, \vec{c}\}$, где $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{BA}$, длины этих векторов обозначим через a и c соответственно.

Имеем: $\vec{BL} = \vec{c} + \frac{c}{a+c}\left(\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{a+c}\left(a\vec{c} + c\vec{a}\right)$.

Обозначим $\vec{BE} = \alpha\vec{BL}$, тогда

$$\alpha\vec{BL} + \vec{EM} = \vec{BM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right).$$

Приравняем проекции левой и правой частей этого равенства на вектор $\vec{a}$: $\frac{\alpha c}{a+c} = \frac{1}{2}$, откуда $\alpha = \frac{a+c}{2c}$.

Аналогично, положив $\vec{BD} = \beta\vec{BM}$, получим $\beta\vec{BM} + \vec{DL} = \vec{BL}$; проектируя обе части этого равенства на $\vec{c}$, находим $\frac{\beta}{2} = \frac{a}{a+c}$.

Получили $\vec{BE} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{a}{2c}\vec{c}$, $\vec{BD} = \frac{a}{a+c}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$. Таким образом, $\frac{\vec{BE}}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c}\right)$ – это высота треугольника, построенного на единичных векторах $\frac{\vec{a}}{a}$ и $\frac{\vec{c}}{c}$. Далее, $\frac{\vec{BD}}{a} = \frac{1}{a+c}\left(a \cdot \frac{\vec{a}}{a} + c \cdot \frac{\vec{c}}{c}\right)$ – (внутренняя) точка основания этого треугольника, отличная от основания высоты. Поэтому очевидно (рис.3), что $\frac{\vec{BD}}{a} - \frac{\vec{BE}}{a} \perp \vec{BE}$ – и утверждение задачи доказано.

Разумеется, к этому решению можно было подойти более формально: вектор $\vec{BD} - \vec{BE} = \frac{a(a-c)}{2(a+c)}\left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{c}}{c}\right)$ параллелен основанию треугольника. А можно было и воспользоваться понятием скалярного произведения:

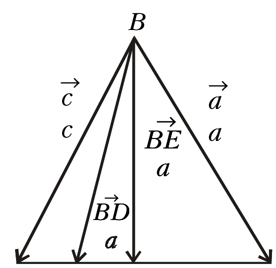

Рис.3

$$\left(\vec{BD}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\left(\vec{a}, \vec{c}\right)}{ac}\right),$$

$$\left(\vec{BE}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\left(\vec{a}, \vec{c}\right)}{ac}\right).$$

А.Акопян, В.Сендеров

М1655. *Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?*