

Поляризованный диэлектрик и его энергия

Е. ВЫРОДОВ, В. СЛЕПНЕВ



ИЗИКУ, ИЗУЧАЕМУЮ В школе, иногда называют элементарной. Это действительно так – в школьной программе нет сложных, трудных для понимания законов,

решение задач не требует высшей математики. Однако и в элементарной физике можно найти немало очень глубоких вопросов, ответы на которые совсем не очевидны. Посмотрите, какая дискуссия развернулась на одном из факультативных занятий в нашей школе. Участвовали в ней учитель физики (Учитель) и два школьника (Володя и Антон). Началась она с очень простого вопроса, а закончилась...

Учитель. Тема нашего занятия – «Энергия конденсатора». Рассмотрим плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого S , а расстояние между ними d . Пусть этот конденсатор заряжен и заряд его равен Q . Как найти электростатическую энергию, запасенную в нем?

Это можно сделать разными способами, например так. Представим себе, что мы заряжаем конденсатор, перенося заряд маленькими порциями с одной его обкладки на другую. Работа, которую мы при этом совершаем, идет на увеличение энергии конденсатора. Давайте найдем работу, необходимую, чтобы зарядить конденсатор до заряда Q , – это и будет ответом на поставленный вопрос.

Обозначим через ΔQ_i заряд i -й порции переносимого нами заряда, а через Q_i – заряд конденсатора перед переносом i -й порции. Тогда заряд ΔQ_i , перемещаясь с одной пластины на другую, проходит разность потенциалов $U_i = Q_i/C_0$ (где $C_0 = \epsilon_0 S/d$ – емкость конденсатора), а работа, которую нужно для этого совершить, равна

$$\Delta A_i = U_i \Delta Q_i.$$

Полную работу, затраченную на пере-

нос всего заряда Q , а значит, и энергию заряженного конденсатора, мы найдем, просуммировав все ΔA_i :

$$W_0 = A = \sum_i U_i \Delta Q_i.$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, нарисуем график зависимости U_i от Q_i . Она очень простая – это прямая

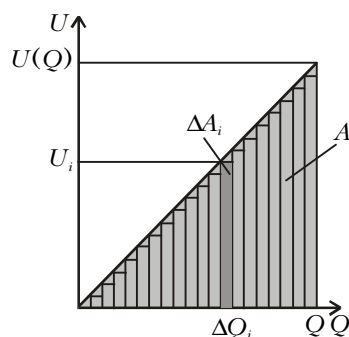


Рис. 1. График, использованный Учителем для вычисления энергии заряженного конденсатора

пропорциональность (рис. 1). Сразу заметим, что каждая элементарная работа ΔA_i численно равна площади прямоугольника, построенного на отрезке ΔQ_i и упирающегося в наш график. Понятно, что сумма площадей всех этих прямоугольников будет близка к площади под графиком функции $U(Q)$ (все ΔQ_i – очень маленькие). В пределе при $\Delta Q_i \rightarrow 0$ мы и получим эту площадь под графиком. Надеюсь, вычисление площади треугольника ни у кого проблем не вызывает? Тогда напомним ответ:

$$W_0 = \frac{1}{2} U(Q)Q = \frac{Q^2}{2C_0}.$$

Володя. Где-то подобное рассуждение уже возникало.

Учитель. Ну конечно, при вычислении перемещения при равноускоренном движении.

Антон. Вообще-то, можно было не возиться с этими детскими прямоу-

гольничками и площадями под графиком. По сути, мы просто вычислили интеграл от линейной функции.

Учитель. Что ж, не в меру образованные люди могут сказать и так – это будет чистая правда.

Володя. Интересно, а если между обкладками конденсатора находится диэлектрик – результат будет таким же?

Учитель. А в чем, собственно, разница? В нашем вычислении энергии мы вообще нигде не использовали тот факт, что конденсатор – воздушный. Нам нужна была только его емкость C_0 – она определяла связь между U_i и Q_i . Если диэлектрическая пластина заполняет все пространство между обкладками и ее диэлектрическая проницаемость равна ϵ , то емкость конденсатора будет в ϵ раз больше: $C = \epsilon C_0$. Эта емкость и войдет вместо C_0 во все формулы, в том числе и в конечный результат:

$$W = \frac{Q^2}{2\epsilon C_0}. \quad (1)$$

Володя. Сейчас... Я вижу по край-

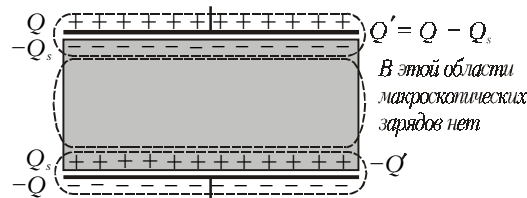


Рис. 2. Таким Володя увидел заряженный конденсатор с диэлектриком

ней мере еще один способ найти эту энергию. Может быть, он даст тот же ответ, а может и нет. Смотрите. Что происходит с диэлектрической пластиной (рис. 2), вставленной в наш конденсатор? Она поляризуется – на ее поверхностях возникают связанные заряды Q_s и $-Q_s$. Величину Q_s мы можем найти, если вспомним, что полное электрическое поле внутри пластины, создаваемое зарядами обкладок и поляризационными зарядами, должно быть в ϵ раз меньше, чем поле обкладок:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} \quad (2)$$

(поле между двумя плоскостями с зарядами Q и $-Q$ равно $Q/(\epsilon_0 S)$). Отсюда находим

$$Q_s = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q. \quad (3)$$

Теперь заметим, что связанные заряды расположены вплотную к обкладкам

конденсатора. Мы можем объединить обкладку и прилегающую к ней поверхность диэлектрика в единую заряженную плоскость, заряд которой равен

$$Q' = Q - Q_s = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Но тогда вся наша система зарядов представляет собой две плоскости с зарядами Q' и $-Q'$, расположенные на расстоянии d друг от друга. А это просто воздушный конденсатор емкостью C_0 , несущий заряд Q' . Но его энергия равна

$$W = \frac{Q'^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon^2 C_0}, \quad (4)$$

что в ϵ раз меньше результата (1).

Антон. Подождите, почему конденсатор оказался вдруг воздушным? В нем же диэлектрик, и его емкость не C_0 , а ϵC_0 .

Володя. Нет-нет, здесь мы должны взять именно C_0 . Наличие диэлектрика мы уже учли, когда к заряду конденсатора добавили величину Q_s . Ведь все влияние, которое диэлектрик оказывает на электростатические явления, сводится к действию его связанных зарядов. Разве не так мы считаем, когда вычисляем электрическое поле в диэлектрике? Учтя связанные заряды, мы имеем полное право про диэлектрик забыть. Более того, мы просто обязаны это сделать. Иначе один и тот же фактор – наличие диэлектрика – мы учтем два раза. Согласны?

Учитель. Гм... Звучит убедительно. Действительно, прибавив ко всем зарядам нашей системы связанные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика, мы вычисляем их электрическое поле так, как если бы они находились в вакууме. Именно так составлено уравнение (2), из которого Володя нашел величину Q_s . Но вот можно ли поступать так же при вычислении энергии этих зарядов? Это совсем не очевидно. В любом случае из ответов (1) и (4) может быть верен только один! В своем рассуждении я абсолютно уверен – там просто негде допустить ошибку. Мы честно вычислили работу, затраченную при заряде конденсатора. Вся эта работа и пошла на изменение его энергии – куда же еще?

А вот в Володином рассуждении есть скользкий момент. Вычисляя энергию, он добавил к зарядам обкладок связанные заряды диэлектрика, после чего диэлектрик выбросил вообще, заявив, что на энергии системы это никак не отразится.

Володя. А разве это неправда? Ведь электростатическая энергия может быть связана только с зарядами. В глубине

диэлектрика макроскопических зарядов нет – они возникают только на поверхности, а эти поверхностные заряды мы учли.

Учитель. Это так. Но наш диэлектрик *поляризован*. Если это неполярный диэлектрик, то при поляризации положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны. Для того чтобы растянуть молекулы диэлектрика, требуется совершить некоторую работу, которую логично назвать энергией поляризованного диэлектрика. И совсем не факт, что эта энергия совпадает с энергией электростатического взаимодействия связанных зарядов, возникающих при этом на поверхности нашей пластины.

Володя. Разве? А мне кажется, что это ровно она и есть. Работа, совершаемая при поляризации пластины, как раз и идет на создание связанных зарядов Q_s и $-Q_s$.

Учитель. Знаете, у меня есть предложение. Поскольку корень наших разногласий – диэлектрик (его энергия), логично будет рассмотреть проблему в чистом виде, избавившись от конденсатора. Представим себе, что мы выдержали нашу пластину из конденсатора, причем сделали это настолько быстро, что заряды внутри нее не успели сместиться – состояние поляризации осталось прежним. Через некоторое (очень малое) время диэлектрик, конечно же, утратит поляризацию – ведь внешнее электрическое поле отсутствует. При этом энергия, которой он обладал, перейдет в тепло. Как найти эту энергию?

Антон. Я догадываюсь, что скажет Володя. Наша система состоит теперь из двух плоскостей связанных зарядов $\pm Q_s$, расположенных на расстоянии d друг от друга. По сути, это тот же конденсатор емкостью C_0 , только заряженный зарядом Q_s . Его энергия равна

$$W_d = \frac{Q_s^2}{2C_0}. \quad (5)$$

Володя. Да, я бы искал энергию диэлектрика именно так.

Учитель. Отлично, а теперь смотрите, как сделал бы я. Предположим, мне удалось тем или иным способом поляризовать нашу пластину, причем так, что больше никаких изменений в окружающем мире не произошло. Например, возьмусь за каждую молекулу руками и растяну ее до нужного состояния (напомню, что речь идет о неполярном диэлектрике). Работа, которую я при этом совершу, будет запасена в диэлектрике в виде энергии W_d . После этого вставлю поляризованную пластину в *незаряженный* конденсатор и нач-

ну его заряжать. Заряды диэлектрика при этом буду удерживать на месте, не позволяя поляризации измениться. Какую работу мне придется совершить, чтобы зарядить конденсатор до заряда Q ? Разность потенциалов, которую проходит каждая порция заряда ΔQ_i , теперь складывается из двух частей. Одна из них создается связанными зарядами диэлектрика $\pm Q_s$ и равна $U_s = -\frac{Q}{C_0}$. Другая создается зарядами обкладок конденсатора $\pm Q_i$, которые они имеют перед переносом порции ΔQ_i : $U_i = \frac{Q_i}{C_0}$. Полная работа при переносе заряда равна

$$A = \sum_i (U_s + U_i) \Delta Q_i = -\frac{Q_s}{C_0} \sum_i \Delta Q_i + \sum_i U_i \Delta Q_i = -\frac{Q_s Q}{C_0} + \frac{Q^2}{2C_0}.$$

Зарядив конденсатор, я могу отпустить молекулы диэлектрика – в поляризованном состоянии их будет удерживать поле обкладок. Верну теперь систему в исходное состояние, переносим порцию заряда обратно. Поляризация диэлектрика будет при этом меняться вместе с полем обкладок – ведь заряды молекул никто не держит. По сути, я буду разряжать обычный конденсатор с диэлектриком, емкость которого ϵC_0 . Энергию, выделившуюся при разряде, легко найти. Для этого нужно сделать такой же расчет, как при вычислении W_0 , но только вместо емкости C_0 надо взять ϵC_0 . Можно сразу сказать, каким будет результат?

Антон. Конечно, его дает формула (1).

Учитель. Совершенно верно. Но, поскольку все вернулось в начальное состояние, эта энергия должна быть равна суммарной работе, затраченной при зарядке: $W_d + A = W$, откуда мы и найдем энергию диэлектрика:

$$W_d = W - A = \frac{\epsilon Q_s^2}{2(\epsilon - 1)C_0}. \quad (6)$$

Володя. Ну вот, опять два разных ответа – (5) и (6). И непонятно, какой из них правильный.

Антон. Послушайте, я, кажется, понял, как разрешить наши сомнения! Энергию W_d мы сможем найти, если вычислим работу по растяжению одной молекулы диэлектрика, а потом умножим на число молекул.

Володя. Ну, это очень сложно. Нужно представлять себе внутреннее устройство молекулы, ее электронных оболочек, а для этого, говорят, нужна квантовая механика. Вряд ли нам это

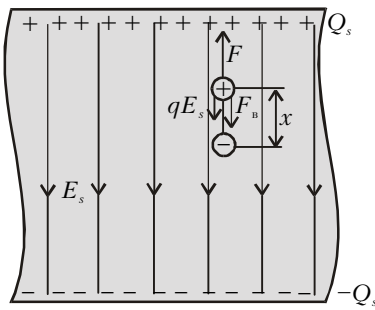


Рис.3. Силы, действующие на молекулярные заряды в поляризованном диэлектрике (модель Антона)

удастся.

Антон. Нет-нет, смотрите. Возьмем простейшую модель молекулы нашего неполярного диэлектрика – два заряда q и $-q$, центры которых в нормальном состоянии совпадают. Если же их раздвинуть на расстояние x («растянуть» молекулу), то возникает внутримолекулярная сила $F_b(x)$, возвращающая заряды в исходное положение (рис.3). Растягивая молекулу, мы совершаем работу против этой силы. Работа эта идет на увеличение потенциальной энергии деформации молекулы.

Володя. Ну и как же мы найдем эту работу? Ведь для этого нужно знать $F_b(x)$.

Антон. Она нам не понадобится! Если мы начнем растягивать все молекулы диэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля, нам придется преодолеть не только внутримолекулярные силы, но и поле E_s возникающих при этом связанных зарядов. Сила, которую нужно приложить к каждой молекуле, будет равна

$$F(x) = F_b + qE_s. \quad (7)$$

С другой стороны, если ту же самую

поляризацию диэлектрика создало внешнее поле E , то на каждый молекулярный заряд действует электростатическая сила $q(E - E_s)$. Она должна быть уравновешена внутримолекулярной силой, следовательно, $F_b = q(E - E_s)$. Таким образом,

$$F(x) = qE = \frac{q\epsilon}{\epsilon - 1} E_s$$

(здесь я воспользовался тем, что разность $E - E_s$ равна E/ϵ).

Заметим теперь, что при смещении молекулярных зарядов на x на поверхностях пластины возникают области нескомпенсированного заряда толщиной x . А значит, величину связанных зарядов Q_s мы найдем, если умножим молекулярный заряд q на число молекул в этой области: $Q_s = qnSx$, где n – концентрация молекул в диэлектрике. Электрическое поле, создаваемое этими связанными зарядами, равно

$$E_s = \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} = \frac{qnx}{\epsilon_0}.$$

Подставив этот результат в формулу для $F(x)$, получаем

$$F(x) = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0} x.$$

Как видим, в этих условиях каждая молекула ведет себя как пружинка жесткостью $k = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0}$.

Володя. Здорово! И никакой квантовой механики. Теперь, зная зависимость $F(x)$, мы можем найти работу, затраченную на растяжение молекулы.

Антон. Конечно. Осталось только заметить, что для создания на поверхностях пластины связанных зарядов Q_s каждую молекулу нужно растянуть на

$$x = \frac{Q_s}{qnS}.$$

Работа, совершенная над одной молекулой, будет равна

$$A_0 = \frac{kx^2}{2} = \frac{\epsilon Q_s^2}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 nS^2}.$$

Чтобы найти полную работу, т.е. энергию поляризованного диэлектрика, нужно умножить A_0 на число молекул в пластине:

$$W_d = ndSA_0 = \frac{\epsilon Q_s^2 d}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 S}.$$

Володя. Но ведь это в точности результат (6)!

Антон. Конечно, ведь $\epsilon_0 S/d$ равно C_0 – емкости конденсатора, из которого мы выдергивали нашу пластину.

Учитель. И теперь понятно, почему именно этот ответ, а также ответ (1) для энергии конденсатора, являются верными, а Володины результаты (4) и (5) – нет. Из решения Антона видно, где у Володи возникает ошибка. Заменяя диэлектрик связанными зарядами, возникающими на его поверхностях, и вычисляя энергию так, как если бы эти заряды находились в вакууме, мы не учитываем работу против внутримолекулярных сил, затрачиваемую на увеличение потенциальной энергии деформации молекул. Учитывается только работа по преодолению сил электрического поля, в котором находятся молекулы. Или, другими словами, только второе слагаемое в формуле (7).

Володя. Но тогда, если мы оставим только это слагаемое, решение Антона должно дать ответ (5).

Учитель. Совершенно верно. Попробуйте сами в этом убедиться.