ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sin 2x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{1/2}(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|}\geq 0.$$

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A=35°$, $\angle D=145°$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Найдите все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y=-\frac{2}{3}-\arcsin x$$

и

$$y=-\frac{2}{3}-2\operatorname{arctg} kx$$

имеет положительную ординату.

5. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H, причем SH – высота пирамиды. Найдите ребра CS и CD, если $CH=4$, $AS=3\frac{3}{4}$, $AD=3$ и $AB=BS$.

6. Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases}\left(y^2-x^2\right)+6\left(y^2-x^2\right)-(y+x)^2+5y+7x+1>0,\\ y>1-x.\end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y = 2 - x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3 \cdot \sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2 + x - 2\right) \leq 0\,.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0\,.$$

4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F – середина стороны AB, а точка G – точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найдите угол BCA, если известно, что $FH:HE = 2:3$.

5. При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - \\ \qquad - 2 + \operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \\ \qquad - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

6. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB, DAC и DBC в точках K, L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB, точка L – на стороне AC, точка M – на стороне BC. Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90°$, $\angle BDC = 105°$, $\angle ADC = 75°$. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{(x+1)} \frac{1}{8} \geq -6.$$

3. Решите уравнение

$$\left|\sin^3 x\right| + 13\cos^3 x - \cos x = 0\,.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK:KD = 1:2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найдите объем пирамиды.

5. Найдите все значения параметра a, при которых существуют $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2 - 3y,\ y + 2) \leq 5, \\ \left(a^2 + \dfrac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - \right. \\ \left. -16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x \cdot (\pi + 2\arcsin x)\right)^{1/2} \geq \\ \qquad \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Вариант 4

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x\,.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x-2) - \log_9\left(x^2 - 10x + 25\right) = \log_3 2.$$

3. Решите неравенство

$$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$$

6. На отрезке AB взята точка C, отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D. Прямая BD пересекает большую окружность в точке N, $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

7. Для любых допустимых значений a решите неравенство

$$\log_a\left(3a^x - 5\right) < x + 1\,.$$

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α, $AA_1 = 2$. Найдите AB.

Вариант 5

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^x + 2^x - 2 = 0\,.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} > x + 1\,.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2\,.$$

5. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $AB = 10$, $AE = 1$.

6. Решите уравнение

$$\log_2(4x+1)\log_5(4x+4) + \log_3(4x+2)\log_4(4x+3) = 2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4).$$

Вариант 6

(биологический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{\left(b^3 \cdot \sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b \cdot \sqrt{b}}\right),$$

если $\log_b a = \sqrt{3}$.

2. Решите неравенство

$$\left|x^2 + x - 2\right| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6\,.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3}\right).$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin\frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если SO – высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

5. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \geq 3\cdot 4^t - \\ \qquad - 3\cdot 2^{t+2} + \dfrac{27}{2}, \\ \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^{4t} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{4t} + 2 +} \\ +141\log_2(\cos 10x) + 6\cos 5x \geq (2t+1)^{1,5}. \end{cases}$$

Вариант 7

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1.$$

2. Найдите $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ и что $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ или $\dfrac{2}{7}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

5. На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A_1E$, $CF = 2C_1F$. Через точки B, E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

6. Определите а) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение

$$5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$$

имеет решения; б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b.

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Найдите численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a} - \frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

2. Решите уравнение

$$\left|\left|4-x^2\right| - x^2\right| = 1.$$

3. Решите уравнение

$$5 + \frac{1}{\sin^2(3x)} = 7\operatorname{ctg}(3x).$$

4. Из цистерны в бассейн сначала перелили 50 % имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 л, затем еще 5 % от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31 %. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?

5. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \frac{3}{2}.$$

6. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

8. При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x} 7} \geq 0.$$

2. Найдите знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (−7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

3. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD>BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции $AD{:}BC$.

4. Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 + 3\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Точка S – вершина пирамиды, $AB = 1$, $AS = 2$, BM – медиана треугольника ABC, AD – биссектриса треугольника SAB. Найдите длину отрезка DM.

6. Найдите все пары целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие уравнению

$$3x = 5y^2 + 4y - 1,$$

и докажите, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

Вариант 10

(филологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2+4x+3}{|1+x|} \leq 0.$$

2. Длина стороны BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность радиусом 10. Найдите длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.

3. Решите уравнение

$$\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2.$$

4. *А*, *И*, *Б* сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто?

б) Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, укажите эту букву.

5. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{13 + 3^{\left(3^{1-\cos x}\right)}} \leq \sqrt{5e^{-2x^2-1}}.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2(x+6) - (a-1)\sin(x+6)\cdot\sin\pi x + (a-1)\sin^2\pi x = 0$$

имеет единственное решение?

Вариант 11

(экономический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4x-1}{11}}\left(7x-2x^2\right) \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3\sin x} = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 8\left(3-\sqrt{8+x}\right)} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}.$$

4. В равнобочной трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) известны длины $QR = 1$, $PS = 4$. Точки P', Q', R', S' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые PP', QQ', RR', SS' перпендикулярны этой плоскости, $PP' = 1$, $QQ' = 7$, $RR' = 2$, $SS' = 1$. Точки K' и L' лежат на прямых $P'R'$

и $Q'S'$ соответственно. Найдите длину отрезка $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3:2$, $Q'L' : L'S' = 2:3$.

5. Найдите все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1;\ 2)$.

6. Вокруг треугольника MKH описана окружность с радиусом r и центром в точке O. Длина стороны HM равна a. Для сторон треугольника выполнено соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найдите площадь треугольника OKL, где L – точка пересечения медиан треугольника MKH.

7. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и $Б$ общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A была больше цены одной акции вида $Б$. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определите цену продажи одной акции видов A и $Б$.

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\bigl|4x - |x-2| + 3\bigr| = 16.$$

2. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2401}{36}\right) + 2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{226\pi}{17}\right)?$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4x+7} - 3x + 5}{16 - 3x^2 + 22x} \le 0.$$

4. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$$

при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

5. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l, в треугольник ABL вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K, $BK = b$. На сторонах AB и BC в ΔABC выбраны точки M и N соответственно, так что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в ΔABC, причем $MB + BN = c$. Найдите отношение площадей треугольников ABL и MBN.

6. Найдите все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) - b \cdot 2^{\sin(\pi b x)} - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) + b \cdot 2^{\sin(\pi b x)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Вариант 13

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-3}{3x} \ge \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2\left(x^2 - 5\right) = \frac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1 - x).$$

3. 9 % коренного населения города N в зимний период занято народным промыслом. Летом 36 % коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности в зимний период. Определите, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус угла ADC равен $\frac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{3}$. Найдите сторону BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

5. Найдите все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача «Найти арифметическую прогрессию, если известны ее семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или ее решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

6. Две кривые на плоскости $(x;\ y)$, заданные уравнениями

$$y = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{9} + y = 1,$$

пересекаются в четырех точках. Докажите, что

1) существуют по крайней мере две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки;

2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найдите радиус этой окружности.

Вариант 14

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$$

2. Решите уравнение

$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3|x| - 11}{x - 3} > \frac{3x + 14}{6 - x}.$$

4. В треугольнике ABC известны стороны $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD – биссектриса. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ADC. Выясните, что больше: R или 6,5.

5. Решите неравенство

$$\log_{2x-3}\left(\sqrt{x+2} + x - 3\right) \le 1.$$

6. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найдите эти числа.

7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - \\ \qquad\qquad\qquad - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Снаряд, вылетев из пушки со скоростью v под углом α к горизонту, разорвался на две равные части в верхней точке траектории. Первая часть полетела вертикально вверх, а скорость второй части оказалась в n раз больше скорости первой. Найдите расстояние между осколками через время τ после разрыва, если к этому моменту еще ни один осколок не долетел до земли.

2. Шарик массой m прикреплен двумя невесомыми нерастяжимыми нитями длиной L каждая к горизонтальной штанге, симметрично закрепленной на вертикальной оси, вращающейся с угловой скоростью ω (рис.1). Угол между нитями α. Найдите силы натяжения нитей.

3. Из листовой резины склеили трубку радиусом r и, заткнув один конец, стали надувать ее воздухом. Когда давление внутри трубки превысило атмос-

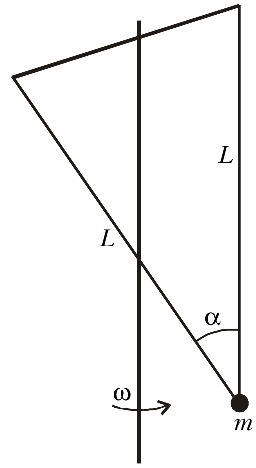

Рис. 1

ферное на Δp, ее радиус увеличился на Δr. Найдите период малых вертикальных колебаний груза массой m, подвешенного на полоске этой резины длиной L и шириной b. Считать, что при деформациях резина подчиняется закону Гука, а ее масса значительно меньше m.

4. С молем гелия проводят циклический процесс, состоящий из четырех участков. На первом и втором участках газ охлаждают так, что его плотность остается неизменной на первом участке и увеличивается обратно пропорционально температуре на втором. Затем газ возвращают в исходное состояние, нагревая его сначала при неизменной плотности, а затем так, что его плотность изменяется обратно пропорционально температуре. Найдите количество теплоты, полученное газом на последнем участке, если на втором участке его температура уменьшилась в k раз, а в исходном состоянии была равна T_1.

5. КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно *1—2—3—4—1*, равен η_1. В точке *1* температура и давление рабочего вещества – идеального газа – максимальны. Если бы изменение состояния газа от точки *2* до точки *4* происходило так, что на pV-диаграмме этот участок имел бы вид отрезка прямой, а от точки *1* к точке *2* и от точки *4* к точке *1* – как и в цикле Карно, то КПД машины был бы η_2. Найдите КПД машины при изменении состояния газа по циклу *2—3—4—2*, считая, что участок *4—2* – такой же, как и в предыдущем цикле, а два других соответствуют участкам цикла Карно.

6. На концах невесомого непроводящего стержня длиной L закреплены два небольших шарика. Каждый шарик имеет массу m и заряд q. Стержень может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей перпендикулярно стержню на расстоянии b от его конца, и находится в положении устойчивого равновесия в однородном горизонтальном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$. Найдите скорость шарика, удаленного от оси на расстояние b, в момент прохождения положения равновесия после отклонения стержня от исходного положения на угол α.

7. Первоначально в схеме, показанной на рисунке 2, ключ K находился в положении *1*, а оба конденсатора были разряжены. Ключ перевели в положение *2*, потом в положение *1* и вновь вернули в положение *2*. Найдите отношение количеств теплоты, выделившихся внутри источника после первого и второго переключений ключа в положение *2*, если в каждом положении ключ находился достаточно долго, а емкости обоих конденсаторов одинаковы.

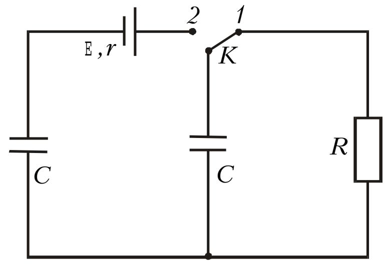

Рис. 2

8. При длительной зарядке аккумулятора от источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В скорость выделения водорода устанавливается равной $m = 0{,}2$ г/ч. При этом внутреннее сопротивление аккумулятора таково, что источник отдает ему максимальную мощность. Найдите внутреннее сопротивление источника, если ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}_а < \mathcal{E}/2$.

9. Обмотка массивного ротора электродвигателя сделана в виде прямоугольной рамки площадью S из N витков тонкого провода. Концы обмотки замкнуты между собой, а ее сопротивление равно R. Обмотки статора двигателя питаются переменным током и создают в роторе однородное магнитное поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен оси ротора и вращается вокруг нее с угловой скоростью Ω. Найдите средний тормозящий момент внешних сил, действующих на ротор, если его угловая скорость почти постоянна и равна ω, причем $\omega < \Omega$.

10. Плосковыпуклую линзу, лежащую выпуклой стороной на стеклянной пластинке, освещают нормально падающим параллельным пучком света, импульс фотона которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}5$ км/с. Найдите радиус k-го ($k = 2$) светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете, если радиус кривизны линзы $R = 0{,}5$ м.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Автомобиль, движущийся по горизонтальной дороге, попадает в полосу дождя, капли которого падают на землю вертикально с постоянной скоростью. Известно, что при скорости автомобиля $v_1 = 36$ км/ч в его наклонное лобовое стекло попадает $n_1 = 200$ дождевых капель в секунду, а при скорости $v_2 = 72$ км/ч это число возрастает до $n_2 = 300$ капель в секунду. Сколько капель будет попадать в лобовое стекло за 1 секунду, если автомобиль остановится?

2. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты (рис.3). Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость

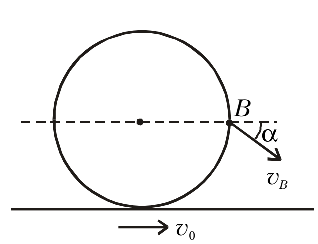

Рис. 3

$\vec{v}_B$ точки B, находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найдите скорость центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

3. Известно, что в некоторой точке траектории тела, брошенного с земли под углом α к горизонту, кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии, отсчитываемой от этой же поверхности. Какой угол составляет с горизонтом скорость тела в этой точке? Ответ получите в общем виде, численный расчет проведите при $\alpha = 45°$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Два небольших тела, находящиеся на концах горизонтального диаметра гладкой полусферы радиусом $R = 20$ см, соскальзывают без начальных скоростей навстречу друг другу (рис.4).

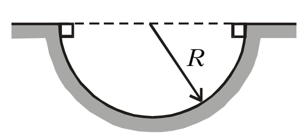

Рис. 4

При столкновении тела слипаются и далее движутся как одно целое. Найдите отношение масс тел, если максимальная высота над нижней точкой полусферы, на которую поднимаются слипшиеся тела после столкновения, равна $h = 5$ см. Трение не учитывать.

5. Запаянная с одного конца трубка длиной $L = 110$ см погружается в воду в вертикальном положении открытым концом вниз. Определите давление воздуха внутри трубки, если ее верхний конец находится на уровне поверхности воды. Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

6. Одноатомный идеальный газ при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_1 = 372$ К занимает объем $V_1 = 2$ м^3. Газ сжимают без теплообмена с окружающей средой, совершая над ним работу $A = 35$ кДж. Найдите конечную температуру газа.

7. Два одинаковых маленьких шарика массами $m = 10$ г, заряженные одинаковыми зарядами $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, закреплены на непроводящей нити, подвешенной на штативе (рис.5). При какой длине l отрезка нити между шариками оба отрезка нити (верхний и нижний) будут испытывать одинаковые натяжения? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

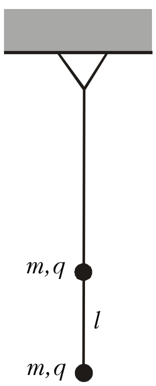

Рис. 5

8. Две электроплитки, рассчитанные на напряжение $U = 120$ В, имеют при этом напряжении мощности $P_1 = 1$ кВт и $P_2 = 2$ кВт соответственно. Во сколько раз будут отличаться мощности, выделяющиеся в этих плитках, если их поочередно подключить к некоторому источнику с внутренним сопротивлением $r = 14{,}4$ Ом? Считать, что сопротивления плиток не зависят от температуры.

9. На водной поверхности бассейна глубиной $H = 2$ м плавает круглый плот радиусом $r = 1{,}5$ м. В центре плота укреплена вертикальная мачта, на вершине которой подвешен фонарь. Определите высоту мачты, если известно, что радиус тени от плота на дне бассейна равен $R = 2{,}1$ м. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Фонарь считать точечным источником света.

10. Изображение предмета наблюдают на экране, расположенном на расстоянии $f = 5$ см от тонкой линзы, фокусное расстояние которой $F = 3{,}5$ см. Линзу смещают в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, на $\Delta = 7$ мм. На какое расстояние сместится при этом изображение предмета?

Химический факультет

1. Два одинаковых алюминиевых шарика уравновешены на рычажных весах (рис.6). Расстояние от оси весов до точки подвеса $l = 10$ см. Один из шариков полностью погружают в воду. На какое расстояние x необходимо переместить точку подвеса другого шарика, чтобы равновесие сохранилось? Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см^3.

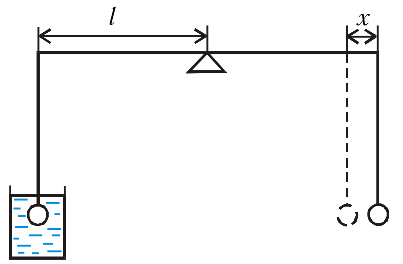

Рис. 6

2. Точка совершает гармонические колебания вдоль прямой линии. При движении между крайними положениями средняя скорость оказалась равной $v = 4$ м/с. Найдите максимальную скорость.

3. В узкой цилиндрической трубке, запаянной с одного конца, находится воздух, отделенной от наружного столбиком ртути. При горизонтальном положении трубки ртуть и воздух занимают по половине трубки. Если трубку осторожно повернуть открытым концом вниз, то выльется половина ртути. Найдите длину трубки. Температура постоянна. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Поверхностное натяжение не учитывать.

4. При нагревании некоторого количества идеального газа его давление изменялось прямо пропорционально объему. На сколько градусов нагрели газ, если его объем увеличился в $k = 1{,}2$ раза? Начальная температура $t = 27$ °С. Масса газа постоянна.

5. Два гальванических элемента соединены по схеме, изображенной на рисунке 7, и имеют следующие характеристики: ЭДС $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}6$ Ом. При какой величине сопротивления R ток через второй элемент не идет?

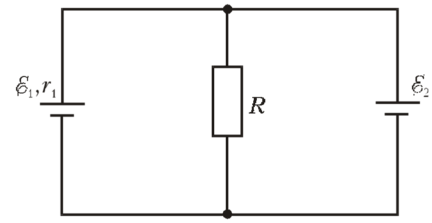

Рис. 7

6. Проволочное кольцо радиусом $r = 0{,}1$ м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R = 2$ Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 2$ В и замкнули цепь контура. Найдите силу тока в контуре в тот момент, когда энергия колебаний распределилась поровну между электрическим и магнитным полями. Затухание не учитывать.

8. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см. На каком расстоянии от линзы нужно поместить плоское зеркало для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя через линзу, стали параллельными?

9. Дифракционная решетка представляет собой пластинку шириной $l = 1$ см, на которую нанесено $N = 2500$ штрихов. На решетку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Какое наибольшее количество максимумов может дать такая решетка (при нормальном падении света на нее)?

10. Катод фотоэлемента освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 350$ нм. Для того чтобы фотоэлектроны не достигали анода, между анодом и катодом нужно приложить напряжение $U > 1{,}55$ В. Найдите работу выхода электронов из материала катода. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили В.Алексеев, Н.Григоренко, Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Серов, А.Склянкин, А.Соколихин, В.Сушко, В.Ушаков, М.Федотов, А.Часовских, С.Чесноков, Б.Щедрин