Математика в первой половине XX века

В.ТИХОМИРОВ

РУБЕЖ XIX И XX ВЕКОВ ознаменовался невиданными достижениями в науке и технике. В 1895 году Рентген открывает лучи, получившие его имя, Попов и Маркони изобретают радио. В 1896 году Антуан Беккерель открывает естественную радиоактивность солей урана. В 1900 году Планк, исходя из гипотезы о квантах, строит теорию теплового излучения, в том же году рождается слово «ген» и начинается блистательный период развития генетики. В 1903 году поднимается над землей и парит в воздухе в течение 59 секунд самолет братьев Райт. В 1905 году Эйнштейн закладывает основания специальной теории относительности (одновременно к тем же концепциям приходит Пуанкаре), дает новый толчок квантовой теории (строит теорию фотоэффекта), создает основы теории броуновского движения, впервые публикует формулу $E = mc^2$…

Многим тогда — на рубеже прошлого и нашего веков — казалось, что мир движется к процветанию и прогрессу, что в недалеком будущем его ждет эра благоденствия и наступит, наконец, царство разума.

Увы, эти надежды не оправдались – в нашем веке случилось много трагического: войны, геноцид, оскудение природы, чудовищные преступления… Ныне человечество стоит перед тяжелейшими испытаниями, и если ему не суждено будет объединиться и согласованно следовать принципам разума, оно может и погибнуть. (В прошлом веке невозможно было представить себе такое – Земля казалась бесконечно богатой, и угроза существованию жизни никем не ощущалась.)

Во всех метаморфозах нашего столетия наука (и, в частности, математика) играла огромную роль. Что же произошло в математике за это столетие? Поразмышляем об этом, опираясь на опыт первой его половины.

Надо сразу сказать, что XX век был великой эпохой в истории математики. Достижения математики в этом столетии, пожалуй, превосходят все, что было создано в ней за предшествующие две с половиной тысячи лет. Но как оценивать достижения в науке? Сначала имеет смысл поговорить о том, чем математика может служить человечеству и отдельным ее представителям.

О целях математического творчества

В прошлом веке состоялся диалог между двумя знаменитыми учеными – французским математиком Жаном Фурье и немецким математиком Карлом Якоби. Фурье утверждал, что цель математики – содействовать объяснению природы. Якоби возражал, он настаивал на том, что цель математики – прославление человеческого разума. Тем самым Якоби допускал наличие некоего «внутреннего» смысла в труде математика, столь же трудно объяснимого, как смысл поэзии или искусства вообще.

Но кроме познания природы и «прославления разума» стимулом для математических исследований на протяжении всего Нового времени служили и практические приложения – инженерные, конструкторские, экономические, биологические и иные. Не следует забывать еще и о том, что математика всегда была подспорьем для философского осмысления мира.

Математика XX века прославлялась во всех этих сущностях, и далее мы постараемся это показать. Но пока расскажем о некоторых особенностях самого исторического развития математики в нашем столетии. Весь мир стремительно менялся, многое менялось и в математической действительности.

Математические школы

До начала XX века математика развивалась, в основном, в национальных рамках.

Весь XIX век прошел под знаком состязания двух крупнейших математических школ – французской и немецкой. (Яркое, хотя и пристрастное, изложение этого великого соперничества, в котором в начале века царствовал Гаусс, а в конце века – Пуанкаре, читатель может извлечь из замечательной книги Ф.Клейна «Лекция о развитии математики в XIX столетии» – М.: Наука, 1989.)

Но уже на пороге двадцатого столетия в научную деятельность активнейшим образом включились итальянская, венгерская, австрийская, шведская и некоторые другие математические школы. В середине XIX века образовалась российская, в основном петербургская, школа, во втором десятилетии XX века она пополнилась московской математической школой, ставшей едва ли не крупнейшей в мире в середине тридцатых годов. На рубеже веков появились первые крупные математики на американском континенте, после первой мировой войны начала формироваться замечательная польская математическая школа…

Так было в начале века. Сейчас положение меняется. Во второй половине столетия математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую страну.

Существенно расширились направления исследований, изменились приоритеты.

Иллюстрация П.Шевелева

Научные направления в математике начала и конца века

Представление о том, какие направления преобладали в математике в начале XX века, дает список секций на Втором парижском математическом конгрессе 1900 года (он оставил особый след в истории математики благодаря тому, что на этом конгрессе Давид Гильберт выступил с докладом о математических проблемах). На этом конгрессе работали четыре основные секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики, и еще две: истории и библиографии и преподавания и методологии.

Об изменениях, произошедших в математике в XX веке, свидетельствует перечень секций современных конгрессов: математическая логика и основания математики; алгебра; теория чисел; геометрия; топология; алгебраическая геометрия; комплексный анализ; группы Ли и теория представлений; вещественный и функциональный анализ; теория вероятностей и математическая статистика; дифференциальные уравнения с частными производными; обыкновенные дифференциальные уравнения; математическая физика; численные методы и теория вычислений; дискретная математика и комбинаторика; математические аспекты информатики; приложения математики к нефизическим наукам; история математики; преподавание математики.

Многие из названных направлений родились или оформились лишь в XX столетии. При этом произошла смена приоритетов. Если до второй мировой войны основным направлением в математике был анализ и его различные ответвления (уравнения математической физики, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного), то после войны вкусы многих математиков стали смещаться в сторону топологии, многомерного комплексного анализа, алгебраической геометрии, теории групп Ли и теории представлений и т.п. Самый шумный успех и самые престижные премии в подавляющем большинстве стали получать математики, работающие именно в этих областях.

Но эта смена приоритетов произошла в те времена, которые находятся за пределами избранного нами периода. Какие же новые направления родились в начале нашего века? Прежде всего надо назвать три новые ветви – *функциональный анализ, топологию и теорию функций.* С краткого обсуждения этих направлений начнем наш обзор достижений математики в первой половине нашего столетия.

Функциональный анализ

Одним из важнейших событий развития математики, происходившего в период от начала века до первой мировой войны, было рождение функционального анализа, в котором воссоединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии.

Еще в конце прошлого века были обнаружены аналогии между теорией систем линейных уравнений конечного числа переменных и их бесконечномерных аналогов – линейных интегральных уравнений. Решающий сдвиг в теории был сделан Фредгольмом в 1900 году. Интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad (1)$$

где $y(\cdot)$ – известная функция, а $x(\cdot)$ – искомая, Фредгольм заменил системой линейных уравнений

$$x_i - \lambda h \sum_{j=0}^{n} k_{ij} x_j = y_i, \quad (2)$$

рассмотрев вместо интеграла интегральные суммы:

$$t_i = a + ih,\ x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),$$

$$k_{ij} = K(t_i, \tau_j),\ \ 1 \le i,\ j \le n.$$

Методы решения систем линейных уравнений были разработаны в XVIII веке (о них дается первоначальное понятие в школе, а в полном объеме – на начальной стадии обучения в университете). Применив эти методы и перейдя к пределу, Фредгольм нашел условия разрешимости и алгоритмы нахождения решений уравнений (1). Это послужило стимулом к разработке теории, сочетавшей в себе элементы алгебры и геометрии, но в бесконечномерных пространствах. Так родился *линейный функциональный анализ.*

Существенным разделом функционального анализа явилась также *теория квадратичных форм*, начала которой были заложены Гильбертом (1904 – 1906). Квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

после поворота осей приводится к диагональному виду $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$. Гильберт доказал аналог этого утверждения для квадратичной формы

$$Q(x(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b K(t,\tau)x(t)x(\tau)dt\,d\tau,$$

$$K(t,\tau) = K(\tau,t),$$

где аргументом является не вектор $x = (x_1, x_2)$, а функция $x(\cdot)$ с интегрируемым квадратом:

$$\int_a^b x^2(t)dt < \infty.$$

Совокупность таких функций была названа *гильбертовым пространством* (ее обозначают L_2). Теория квадратичных форм в гильбертовых пространствах явилась математической базой квантовой механики.

Рождение топологии

Слово «топология» относят ныне к двум разделам математики. И изначально для каждого из них имелись свои определения при слове «топология». Одну топологию, родоначальником которой был Пуанкаре, называли долгое время *комбинаторной*, за другой (у истоков ее были исследования Кантора) закрепилось название *общей* или *теоретико-множественной.*

Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики (в соответствии с планировкой этой науки, которая была намечена последователями Кантора – Гильбертом, Г.Вейлем и др.). Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие понятия, как «предел», «сходимость», «непрерывность» и т.п. Основы общей топологии в нашем веке были заложены немецким математиком Хаусдорфом, польским математиком Куратовским, знаменитым представителем московской школы П.С.Александровым и другими.

Комбинаторная топология – это раздел геометрии. Она изучает свойства геометрических фигур, остающихся неизменными при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. Кантор построил взаимно однозначное отображение отрезка на квадрат. Но взаимно однозначного и *непрерывного* отображения отрезка на квадрат построить невозможно. Это доказывается в *теории размерности* – разделе топологии, который появился на свет во втором десятилетии нашего века. В его создании принимали участие Пуанкаре (поставивший задачу и наметивший путь ее решения), крупнейший голландский математик нашего века Брауэр, великий французский математик Лебег, австрийский математик Менгер и выдающийся представитель московской школы (трагически погибший в возрасте 26 лет) Урысон.[1]

Ныне слово «комбинаторная» при определении «геометрической» топологии оказалось отброшенным, и когда произносят слово «топология» без дополнительного определения, имеется в виду топология, рожденная Пуанкаре.

Судьба двух топологий оказалась различной. Общая топология служит, в основном (вспомним Якоби), прославлению человеческого разума, не участвуя непосредственно в постижении законов природы или прикладных исследованиях.

Долгое время и геометрическая топология воспринималась как наука «далекая от жизни», призванная лишь прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства мироздания. Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики – анализ, теорию дифференциальных уравнений и т.п. Сейчас топология – одна из центральных областей математики.

Теория функций

В начале века Лебег завершил построение теории меры и интегрирования. В XIX веке вослед за Коши и Риманом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ понимали как предел римановых сумм: за приближенное значение интеграла брались выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ – разбиение отрезка, а ξ_i – некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i-1}]$.

Лебег же стал поступать по-другому. Он разбивал не ось абсцисс, а ось ординат точками … $y_{i-1} < y_i < \ldots$, мотивируя это тем, что для разрывной функции невозможно выбрать точку ξ_i, которая адекватно «представляла» бы функцию f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Но множества E_i на оси абсцисс, для которых $y_{i-1} \le f(x) < y_i$, у достаточно сложных функций могут быть устроены весьма причудливо, и для построения теории интегрирования необходимо было в первую очередь построить *теорию меры*, т.е. научиться измерять такие множества. Это было сделано Борелем и Лебегом.

Меру множества E (скажем, на отрезке $[0, 1]$) Лебег определял следующим образом. Нижнюю грань сумм длин интервалов, покрывающих E, назовем *верхней мерой* E. Верхняя мера определена для любого множества. Множество E называется *измеримым по Лебегу*, если сумма верхней меры этого множества и верхней меры его дополнения (по отношению к отрезку $[0, 1]$) равна единице. Тогда верхнюю меру E называют *мерой Лебега* множества E и обозначают $\mathrm{mes}(E)$.

Римановы суммы для вычисления интеграла Лебег заменил суммами вида $\sum_i \eta_i \mathrm{mes}(E_i)$, где η_i – некоторая точка отрезка $[y_{i-1}, y_i]$. Он весьма выразительно описал преимущество своего метода. «В методе Коши, – писал Лебег, – оперируют так, как делает это неопытный клерк, который подсчитывает монеты и кредитные билеты сообразно тому, как они попадаются под руку. Тогда как мы оперируем, как опытный и методичный клерк, говорящий: у меня $\mathrm{mes}E_1$ монет по одному франку, стоящих $1 \times \mathrm{mes}E_1$, у меня $\mathrm{mes}E_2$ монет по два франка, стоящих $2 \times \mathrm{mes}E_2$, у меня $\mathrm{mes}E_5$ монет по пять франков, стоящих $5 \times \mathrm{mes}E_5$, … Итого, у меня $1 \times \mathrm{mes}E_1 + 2 \times \mathrm{mes}E_2 + 5 \times \mathrm{mes}E_5 + \ldots$ франков. Конечно, и тот и другой клерки придут к одному и тому же результату. Но в случае сумм неделимых, число которых бесконечно, разница двух методов капитальна.» На базе новой теории меры родилось новое направление в теории функций – *метрическая теория функций*.

Трансформировалась и теория множеств. У истоков нового направления стояли три французских ученых – Борель, Бэр и Лебег. Они заложили основания *дескриптивной теории множеств* – теории числовых множеств, где стали изучать строение сложных, причудливо устроенных множеств.

В двадцатые годы ведущая роль в теории функций перешла к русской школе, которую представляли Николай Николаевич Лузин и его ученики П.С.Александров, Н.К.Бари, А.Н.Колмогоров, Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин, А.Я.Хинчин и др. Они и заложили основания московской математической школы. Сделав первые шаги в теории функций, ученики Лузина пошли в дальнейшем каждый своим путем. Колмогоров и Хинчин преобразовали теорию вероятностей, Александров и Урысон – топологию, Люстерник и Шнирельман – нелинейный анализ, Новиков внес выдающийся вклад в математическую логику, Лаврентьев сделал крупнейшие открытия в комплексном анализе и механике. Лишь Меньшов и Бари продолжали дело своего учителя. В тридцатые годы ни одна математическая школа мира не располагала таким созвездием выдающихся ученых.

Теперь настала пора рассказать о том, какую роль сыграла математика в постижении законов природы.

Математика и физика

В конце прошлого века казалось, что физика – завершенная область знаний. По легенде, когда некий юноша[2] обратился к мэтру с просьбой о напутствии – он хотел стать физиком, – мэтр сказал, что не видит у физики перспектив: на почти безоблачном небе отрытых истин видны лишь два небольших облачка – опыт Майкельсона и законы излучения. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать.

Через несколько лет из первого облачка родилась *специальная теория относительности*, а из второго – *квантовая механика*, которые перевернули все наше представление о мире.

Специальная теория относительности была создана в 1904–1906 гг. усилиями Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре. Устройство физического мира, описываемого этой теорией,

[1] *О теории размерности см., например, в статье «Павел Самуилович Урысон» в «Кванте» №3 за 1998 год.*

[2] *Макс Планк. (Прим. ред.)*

было очень непривычно, оно противоречило физической интуиции, выработанной на протяжении последних трех веков.

Математические корни специальной теории относительности были вскрыты выдающимся немецким математиком Германом Минковским. Им была установлена поразительная связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского.

Проиллюстрируем эту мысль. Пусть два самолета движутся навстречу друг другу, и один летит с постоянной скоростью v (относительно Земли), а другой – со скоростью v' (относительно нее же). Согласно ньютоновской механике, скорость второго самолета относительно первого равна $v + v'$, а специальная теория относительности приводит к другой формуле: $\dfrac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}}$, где c – скорость света. Если бы самолеты летели в одной плоскости, а не вдоль одной прямой, то формула сложения скоростей оказалась бы связанной с преобразованием плоскости Лобачевского. Кратко можно сказать так: *пространство скоростей в специальной теории относительности реализуется, как плоскость Лобачевского, где формула сложения скоростей определяется с помощью движения этой плоскости.* [3]

При этом выяснилось, что время и пространство нельзя рассматривать изолированно, что наш мир *четырехмерен.* В итоге многомерная геометрия приобрела физический смысл.

Это стало вдохновляющим событием для математиков: теории, представлявшиеся многим абсурдной заумью, вдруг оказались у оснований всего мироздания.

Через десять лет Эйнштейн создает общую теорию относительности, где рушит представления о «плоском» мире. Геометрия мира оказывается «искривленной» и связанной с тяготением. Показания приборов, совершивших путь из одной точки в другую, как оказалось, должны зависеть от траектории движения. В основании этого явления лежит одно из важнейших понятий геометрии – *связность*, которая определяет параллельное перенесение на искривленных поверхностях. Это понятие было предметом изучения геометров итальянской школы начала века (Леви-Чивита и др.).

Все это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии в двадцатые и тридцатые годы (и топологии – в наше время).

В двадцатые годы человечество ожидал еще один шок – рождение квантовой механики. Рушился один из незыблемейших бастионов научного миросознания прошлого – предсказуемость будущего по прошлому. Выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем, что можно определить лишь *вероятность* появления электрона на определенном месте экрана, расположенного за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для такого величайшего ученого и одного из основоположников квантовой теории, как Эйнштейн. «Я не верю в Бога, играющего в кости», – не уставал повторять он.

Постараемся пояснить, какая математика стоит за всем этим. В классической механике движение материальной частицы характеризуется ее координатой x и значением ее импульса p. Считается, что их можно вычислить одновременно и дальнейшее движение однозначно определяется дифференциальным уравнением.

В квантовой механике положение материальной частицы определяется волновой (комплексной) функцией $X(x)$, принадлежащей гильбертову пространству L_2 на прямой. Эта функция удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(x)|^2 dx = 1$ и определяет вероятность $\mathrm{P}_X([a,b])$ нахождения частицы (в данный момент времени) в промежутке $[a, b]$ по формуле

$$\mathrm{P}_X([a,b]) = \int_a^b |X(x)|^2 dx .$$

Импульс характеризуется другой функцией $P(p)$. Она также определена на всей прямой и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(p)|^2 dp = 1$. Вероятность $\mathrm{P}_P([\alpha,\beta])$ того, что импульс частицы находится в пределах $\alpha \le p \le \beta$, задается равенством

$$\mathrm{P}_P([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta |P(p)|^2 dp .$$

Движение частицы определяется уравнением с частными производными – *уравнением Шредингера.*

Одним из важнейших положений квантовой механики является связь волновой функции и функции импульса посредством *преобразования Фурье*, что выражается формулой

$$P(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx \quad (3)$$

($\hbar$ – постоянная Планка). Наиболее вероятные значения положения частиц и величины импульса (их средние значения) задаются формулами

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x|X(x)|^2 dx, \quad \eta = \int_{-\infty}^{+\infty} p|P(p)|^2 dp,$$

а если считать, что эти средние равны нулю, то разброс координаты и импульса задается равенствами

$$D_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |X(x)|^2 dx ,$$

$$D_P^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |P(p)|^2 dp .$$

Из соотношения (3) выводится неравенство $D_X^2 D_P^2 \ge \dfrac{\hbar^2}{4}$, называемое *принципом неопределенности Гейзенберга* и выражающее тот факт, что мы не можем точно знать одновременно и положение материальной частицы, и ее импульс. С этим рухнула надежда на детерминизм и познаваемость микромира.

(Так случилось, что математические основания квантовой механики были созданы Гильбертом и его последователями незадолго до рождения самой науки. В частности, равносильность двух подходов к описанию микромира Гейзенберга и Шредингера была достаточно быстро установлена благодаря тому, что один из активных участников построения новой науки, Макс Борн, незадолго до того слушал лекции Гильберта по основам функционального анализа и теории бесконечномерных квадратичных форм.)

А вот еще один сюжет.

Когда английский ботаник Броун обнаружил под микроскопом хаоти-

---

[3] *Объяснению смысла этой фразы и многим другим связям специальной теории относительности и геометрии Лобачевского посвящена книга В.Н.Дубровского, Я.А.Смородинского и Е.Л.Суркова «Релятивистский мир» (М.: Наука, 1984, серия «Библиотечка «Квант», вып.34).*

ческое движение малых частиц в жидкости, ни математики, ни физики поначалу не придали этому особого значения. Теорию броуновского движения на физическом уровне дали Эйнштейн (все в том же 1905 году, когда он заложил основания специальной теории относительности и сделал едва ли не решающий вклад в создание будущей квантовой теории) и польский физик Смолуховский. Начала математической теории были построены Норбертом Винером. При этом, в частности, обнаружилось, что траектории броуновских частиц – непрерывные функции, не имеющие производных.

(Первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции построил Вейерштрасс в 1872 году. Математический мир воспринял это открытие со скептицизмом: многим казалось, что это монстр, не имеющий никакого отношения к действительности. Один из наиболее известных математиков XIX века Шарль Эрмит восклицал: «Я с ужасом отворачиваюсь от этих чудовищ – непрерывных функций без производных». И снова рухнуло привычное воззрение о том, что в мире все «гладко», оказалось, что мир населен «монстрами» и «чудовищами».)

Полная математическая теория броуновского движения была построена А.Н.Колмогоровым, и это также явилось одним из крупнейших завоеваний математики в рассматриваемый нами период времени.

Развитие абстрактных разделов математики

Однако и стремление прославить человеческий разум, не привязываясь к какой-либо практической цели, стимулировало усилия многих и многих ученых, нередко, впрочем, уводя их в такие дебри, которые имели мало соприкосновений хоть с какой-либо реальностью.

В первой половине нашего века возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции, по словам А.Н.Колмогорова, «в основе всей математики лежит чистая теория множеств» – духовное детище Георга Кантора. Эта теория оставила глубокий след в истории математики. Многим казалось, что Кантору суждено было найти такое место для математики, которое Гильберт назвал «раем». (Когда обнаружились противоречия в теории множеств и многие стали выражать сомнения в ее основаниях, Гильберт воскликнул: «Никому не дано изгнать из нас канторовского рая».)

Развитие аксиоматического метода было связано с критическим пересмотром оснований, на которых зиждилась математика.

В двадцатые годы необыкновенного развития достигла алгебра, произошла алгебраизация всей математики. Среди тех, кто в значительной мере способствовал этому процессу, надо назвать Эмми Нётер и ее ученика Ван-дер-Вардена. Была аксиоматизирована элементарная геометрия (Гильберт) и теория вероятностей (Колмогоров). Об общей топологии и теории меры уже говорилось. Стали развиваться и многие другие аксиоматические теории.

В конце тридцатых годов группа французских математиков объединилась в желании построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики», изданный под псевдонимом уроженца Нанси генерала Никола Бурбаки. Фундаментом являлась теория множеств. Затем строился первый этаж: упорядоченные структуры, алгебра, общая топология, теория меры; затем должен был быть построен второй этаж, где смешивались алгебраические и геометрические структуры с топологией, порядком и т.п. Эта попытка осталась незавершенной, сама же цель, по-видимому, утопична (ибо невозможно поспеть за развитием науки), но нельзя отрицать значения усилий, приведших, в частности, к созданию языка, на котором математики понимают друг друга.

Математика и военно-промышленный комплекс

Математика участвовала во многих деяниях века, некоторые из которых едва не подвели человечество к грани всемирной катастрофы.

В частности, огромное число математиков «по обе стороны баррикад» приняли участие в разнообразных программах по созданию новейших средств вооружения и ведения военных действий.

Лучи Рентгена и радиоактивность Беккереля постепенно подвели ученых к мысли о «раскрепощении» атомной энергии. Первоначально физики обходились без математиков. Но создание атомного, а тем более – водородного оружия потребовало построения сложнейших математических моделей и больших расчетов. В создании бомбы в той или иной мере приняли участие многие выдающиеся математики. В итоге были переосмыслены принципы вычислительной математики и созданы мощнейшие вычислительные машины. По-видимому, не настало еще время (во всяком случае в нашей стране) для объективного анализа вклада математиков в создание атомного и ядерного оружия, но невозможно сомневаться в том, что этот вклад был очень велик.

Братья Райт взлетели без математики, но в дальнейшем потребности развития авиации стали стимулом к рождению аэродинамики, которая в начале века создала теорию полета. Среди классиков этой науки – «отец русской авиации» Николай Егорович Жуковский и его последователи (С.А.Чаплыгин, В.В.Голубев и другие). Они применяли в теории полета (и при этом интенсивно развивали) теорию функций комплексного переменного. В сороковые годы была создана сверхзвуковая аэродинамика.

Рождение радио также стимулировало развитие новых областей математики – теорию нелинейных колебаний. Среди создателей этой теории – наши выдающиеся ученые: Л.И.Мандельштам и его ученики и сотрудники – Н.Д.Папалекси, А.А.Андронов и другие.

Управление артиллерийским огнем и проблемы бомбометания оказали влияние на развитие многих разделов теории вероятностей (фон Нейман, Винер, Колмогоров).

Проблемы шифровки секретных сообщений и эффективной передачи их по каналам связи привели к рождению нового раздела в математике – теории информации (К.Шеннон) – и развитию теории кодирования.

Проблемы автоматического управления в промышленности и космической навигации стимулировали развитие оптимального управления (Л.С.Понтрягин, Р.Беллман). То же можно сказать и о многих других разделах прикладной и чистой математики.

Многое из свершенного под покровом тайны потом раскрывалось и становилось достоянием всего человечества.

Противостояние двух систем привело к невиданному развитию техники и (уже в наше время) к невероятному информационному взрыву, вызванному компьютеризацией. Создание первых компьютеров относится к концу того периода, который мы обозреваем, и роль математиков в их разработке весьма велика. (Американцы обычно подчеркивают выдающуюся роль фон Неймана в создании идеологии конструирования компьютеров и программирования.)

Математика, разумеется, участвовала и в гражданском строительстве, и в развитии инженерии, экономики, биологии – всего не назовешь. Среди выдающихся механиков и инженеров, внесших значительный вклад в развитие математики, назовем имена И.Г.Бубнова, Б.Г.Галеркина, А.Н.Крылова, С.П.Тимошенко, Дж.Тейлора, Т. фон Кармана... Этот список можно очень долго продолжать.

Математика и философия

Величие нашего века, в частности, можно усмотреть в том, что он нарушил, изменил, преобразовал почти все представления человечества об окружающем нас мире. И здесь математика сыграла выдающуюся роль.

Поколение, вступавшее в жизнь в начале века, взирало на мир иными глазами, чем мы. Тогда казалось, что наука близка к объяснению картины мироздания. Рационалистически мыслящие люди могли быть уверены, что мир познаваем, что Вселенная существует вечно, что она не имеет ни начала, ни конца (ни во времени, ни в пространстве); что Земля образовалась естественным путем; что естественным путем возникла жизнь на Земле и естественное развитие привело ко всему тому, что открыто перед нашими глазами.

И все это было подвержено в нашем веке тягчайшему испытанию.

Общая теория относительности Эйнштейна привела к развитию космологии, к теории Большого Взрыва, существованию начальной точки отсчета жизни Вселенной. (Она существует – согласно современным воззрениям – не больше 10^{14} лет.) Пространство «заполненной» Вселенной оказалось ограниченным, хотя и расширяющимся. Вопрос о «схлопывании Вселенной в точку» и тем самым о «конце света» остается открытым. Выдающуюся роль в создании космогонических теорий сыграл наш замечательный ученый А.А.Фридман. (А в самое последнее время появились фантастические теории множественности областей Вселенной, отличающихся направлением времени и т.п. (А.Д.Сахаров).)

В большинстве теорий о происхождении нашей Солнечной системы обнаружились глубокие изъяны. (Еще более таинственным представляется происхождение Земли, жизни, их эволюция, происхождение человека.)

Были подвергнуты сомнению и многие основополагающие философские концепции.

Основной тезис постньютоновской научной философии состоял в том, что мир управляется дифференциальными уравнениями, иначе говоря, он полностью предсказуем. И только на ничтожном клочке этого упорядоченного мира находилась «противоправная» область, где царил Хаос: он утверждал себя лишь в азартных играх, где все-таки не все можно было предсказать. Паскаль, Ферма, Я.Бернулли и Лаплас описали первые законы Случая.

Но область Хаоса все росла и росла. Наука о случайном – теория вероятностей – развивалась и крепла. В двадцатом веке (во многом благодаря усилиям наших великих соотечественников – Чебышёва, Ляпунова, Маркова, Бернштейна и Колмогорова) она приобрела оформленные очертания и стала занимать все большее и большее место в толковании Царства Природы. Еще полвека назад казалось, что Царство Хаоса и Царство Порядка соизмеримы по занимаемым ими территориям. И лишь в наше время и этот бастион рухнул.

Многие ученые ныне исповедуют воззрение прямо противоположное ньютоно-лапласовскому, утверждая, что *все есть Хаос.* И они имеют много оснований для такого утверждения.

Была подвергнута сомнению идея «безграничных возможностей человека». Уже говорилось о новом направлении в математике, родившемся в сороковые годы, – теории информации. Норберт Винер включил теорию информации в более общую научную дисциплину, которую он назвал словом «кибернетика». Рождение этой науки также связано с осмыслением многих философских концепций, и прежде всего с понятием сознания. Большинству людей казалось, что лишь человек наделен способностью мыслить. Но вот в сороковые годы Тьюрингом и Винером была декларирована идея *моделирования человеческого сознания.* Еще недавно мысль о том, что машина может выиграть у чемпиона мира по шахматам, многим казалась кощунственной. Но это ведь произошло! Обсуждение возможности создания искусственных существ, обладающих мышлением, также относится к новой философии, возникшей в наше время.

В начале века у многих (в частности, у Гильберта) была иллюзия возможности «разрешения всех проблем» (имеющая также большую философски-познавательную значимость, в частности, в связи с проблемой познаваемости). Казалось осуществимым записать аксиоматическую теорию в виде текста, прочитываемого машиной, и затем придумать алгоритм, с помощью которого машина сможет доказать любую теорему в рамках теории. Для элементарной геометрии это оказалось возможным (правда, «построенный» автомат должен трудиться неслыханно долго, чуть ли не до конца Света, прежде чем разберется в элементарной геометрии). Но по отношению к большинству теорий (в частности, к арифметике) это оказалось невозможным. Этот великий результат был доказан Гёделем (1931).

Кроме всего этого, необходимо сказать о проблемах, поставленных и решенных в нашем веке, о роли проблем в истории науки и т.п. Этому будут посвящены отдельные статьи, так что мы ограничимся лишь беглым обзором.

Проблемы

Всё в совокупности – и участие в постижении законов природы, и развитие абстрактной математики, и достижения в математике прикладной и размышления о философских началах мироздания – привело к зарождению новых областей и разделов, выдвижению фундаментальных концепций, получению выдающихся результатов, развитию новых теорий и разработке эффективных методов.

«Невозможно отрицать глубокое значение, которое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще, и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследования», – эти слова были сказаны Гильбертом во вступительной части его доклада, посвященного формулировкам математических проблем.

Нашему веку досталось от прошлых времен несколько великих проблем.

Самая старая из них – проблема Ферма – о неразрешимости в натуральных числах диофантова уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$. Она была поставлена в XVII веке. Две знаменитые проблемы в теории чисел – Гольдбаха и Эйлера – пришли из XVIII века. *Верно ли, что каждое нечетное число, большее 6, есть сумма трех простых?* С этим вопросом в 1742 году обратился к Эйлеру Христиан Гольдбах. Эйлер в ответ заметил, что для ответа на поставленный вопрос достаточно доказать, что *каждое четное число является суммой двух простых.*

Из проблем XIX века наиболее известны проблемы Римана о нулях дзета-функции и проблема континуума, поставленная Кантором.

В XX веке наиболее известен цикл проблем Гильберта, о котором мы упоминали. На первом месте в списке гильбертовских проблем стояла проблема континуума: *существует ли такое несчетное множество, которое можно однозначно отобразить в единичный отрезок, но при этом единичный отрезок нельзя отобразить однозначно в это множество? Иным словами, существует ли множество, большее по мощности, чем счетное, но меньшее, чем отрезок?*

Проблема Ферма оказалась разрешенной в нашем веке, правда в самом конце его. Проблема Гольдбаха оказалась «почти» решенной И.М.Виноградовым, доказавшим (1937), что любое *достаточно большое* нечетное число представимо суммой трех простых. Проблемы Эйлера и Римана стоят и по сей день.

Расскажем о решении нескольких проблем Гильберта. В значительной доле Гильберт оказался хорошим провидцем, но в нескольких случаях интуиция изменила ему. Как правило, это оказалось напрямую связанным с тем оптимистическим взглядом на мир, который был свойствен людям, родившимся в прошлом столетии.

Заостряя вновь внимание на проблеме континуума, Гильберт исходил из возможности ее разрешения в ту или иную сторону: да или нет. Но выяснилось, что она не может быть ни доказанной, ни опровергнутой методами математической логики и одной общепринятой аксиоматической теорией множеств. То, что она не может быть опровергнута, доказал Гёдель (1936), обратную теорему доказал Коэн (1963).

Убежденность Гильберта в неограниченных возможностях человеческого разума, нашедшая свое выражение в его крылатом афоризме: «мы хотим знать, мы будем знать», придали ему «уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна иметь решение», и это побудило его поставить 10-ю проблему: «указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах» (или иначе: доказать, что существует алгоритм, который по данному многочлену P от n переменных с целыми коэффициентами распознавал бы, имеет ли уравнение $P = 0$ решение в целых числах или нет). Решение этой проблемы также оказалось отрицательным (Матиясевич, 1970).

Гильберт был настолько уверен, что функции трех переменных устроены сложнее, чем функции двух переменных, что высказал гипотезу, что некоторая *конкретная* функция трех переменных не представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных (13-я проблема). Гипотеза Гильберта оказалась опровергнутой весьма радикально: оказалось, что с помощью только одной и притом простейшей функции двух переменных – сложения $(x, y) \to x + y$ – и непрерывных функций одной переменной можно восстановить любую функцию n переменных (Колмогоров, Арнольд, 1957).

Рождение топологии сопровождалось великими свершениями. Вот несколько примеров. Окружность делит плоскость на две части: нельзя точку, лежащую вне круга, соединить с его центром и не пересечь окружность. Французский математик Жордан в XIX веке доказал, что гомеоморфный (т.е. непрерывный и взаимно однозначный) образ окружности также делит плоскость на две части. Голландский математик Брауэр обобщил этот результат на случай гомеоморфного образа многомерной сферы. При этом он использовал и развил исходные идеи Пуанкаре. В частности, он доказал замечательный результат, называемый *теоремой Брауэра о неподвижной точке,* который в простейшем случае выглядит так: *при непрерывном отображении плоского круга в себя есть неподвижная точка.* Дальнейшее развитие топологии привело к замечательным обобщениям этих результатов в трудах американского ученого Александера, П.Александрова, Колмогорова, Понтрягина и других.

Несколько ярких топологических проблем поставил Пуанкаре. Такова, например, проблема о трех замкнутых геодезических. Если взять гладкий камешек и попытаться надеть на него аптечную резиночку, то в случае удачи (если резиночка не соскочит) это будет означать, что вы нашли замкнутую геодезическую. Для любого гладкого овалоподобного тела обязательно найдутся три замкнутые геодезические – в этом состояла гипотеза Пуанкаре, – причем это число не может быть увеличено (в частности, для эллипсоида с разными осями оно в точности равно трем). Эта проблема была решена советскими математиками Люстерником и Шнирельманом.

* * *

Мы рассказали лишь о некоторых событиях первой половины нашего великого и многострадального века, в которых математике было суждено сыграть большую роль; коснулись также и некоторых тем из нашего «внутреннего мира». Хотелось бы надеяться на то, что читатель ощутил грандиозность свершенного в этот незначительный по меркам Истории отрезок времени. Мы надеемся опубликовать в нашем журнале статьи, посвященные открытиям, сделанным в недавнее время, чтобы у юного читателя возникло чувство гордости за тот отрезок времени, в котором протекает его жизнь. Автор этой статьи много раз испытывал это чувство, когда осознавал себя современником Эйнштейна, Колмогорова, Сахарова и других гениев нашего века.