

# Об амплитудах колеблющихся величин

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС



**АРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ** – важнейший вид механического движения. Поэтому полезно обратить внимание на некоторые особые свойства этого движения.

Известно, что при гармонических колебаниях смещение  $x$  тела от положения равновесия зависит от времени  $t$  по закону

$$x = X \cos(\omega t + \delta).$$

Здесь  $X$  – величина максимального смещения, т.е. амплитуда смещения тела от положения равновесия,  $(\omega t + \delta)$  – фаза колебаний,  $\omega$  – циклическая (круговая) частота колебаний,  $\delta$  – начальная фаза колебаний.

Дифференцирование смещения  $x$  по времени  $t$  позволяет найти проекцию скорости  $v_x$  колеблющегося тела на координатную ось  $OX$ :

$$v_x = -X\omega \sin(\omega t + \delta).$$

Произведение величин  $X$  и  $\omega$  в правой части этого равенства имеет смысл величины максимальной скорости  $V$ , т.е. амплитуды скорости колеблющегося тела. Таким образом, амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$$V = X\omega. \quad (1)$$

Дифференцируя проекцию  $v_x$  скорости по времени  $t$ , находим проекцию  $a_x$  ускорения колеблющегося тела на ось  $OX$ :

$$a_x = -X\omega^2 \cos(\omega t + \delta).$$

Произведение величин  $X$  и  $\omega^2$  в правой части равенства – это величина максимального ускорения  $A$ , т.е. амплитуды ускорения колеблющегося тела. Иными словами, амплитуды ускорения и смещения связывает выражение

$$A = X\omega^2. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить по-другому. Их вывод основан на том, что если точка  $C$  равномерно с линейной скоростью  $V$  и угловой скоростью  $\omega$  движется по окружности радиусом  $X$  (рис.1), то ее проекция  $B$  на координатную ось  $OX$  совершает гармоничес-

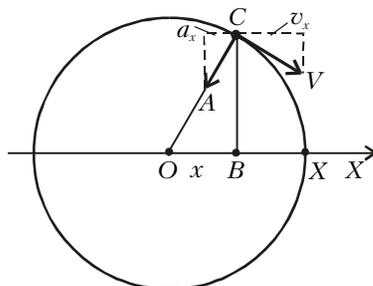


Рис. 1

кие колебания с циклической частотой  $\omega$ . Из кинематики движения по окружности известно, что линейная скорость  $V$ , угловая скорость  $\omega$  и радиус вращения  $X$  связаны соотношением, совпадающим с соотношением (1), а центростремительное ускорение  $A$  выражается через радиус  $X$  и квадрат угловой скорости  $\omega$  формулой, совпадающей с выражением (2).

Обратим внимание еще на одно важное свойство гармонических колебаний. При рассмотрении колебаний в механике часто удобнее их описывать не на языке сил, а на языке энергий. Допустим, исследуемая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии описываются формулами

$$E_p = \frac{\alpha x^2}{2}, \quad E_k = \frac{\beta (x')^2}{2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные постоянные величины (параметры системы),  $x$  и  $x'$  – смещение от положения равновесия и его первая производная по времени, т.е. проекция скорости  $v_x$ . Закон сохранения энергии записыва-

ется в виде

$$\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta (x')^2}{2} = \text{const}. \quad (3)$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{\alpha}{\beta} x = 0,$$

где  $x''$  – вторая производная от  $x$  по времени, т.е. проекция ускорения  $a_x$ . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$x = X \cos(\omega t + \delta),$$

причем для циклической частоты находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (4)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если энергия исследуемой системы описывается формулой (3), то движение является гармоническим колебанием с циклической частотой, определяемой соотношением (4).

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** К пружине жесткостью  $k$ , один конец которой закреплен, подве-

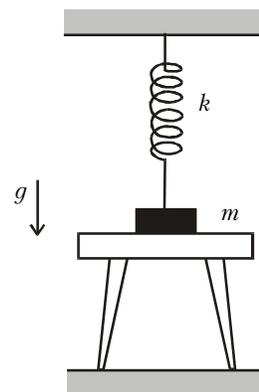


Рис. 2

шен груз массой  $m$ , лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис.2). Подставку быстро убирают. Найдите величины максимальной скорости и максимальной силы упругости пружины при дальнейшем движении груза.

Положение равновесия находится ниже начального положения груза на  $X = mg/k$ . Колебания смещения  $x$  груза относительно положения равновесия будут происходить по закону  $x(t) = X \cos \omega t$  (ось  $OX$  направлена по вер-

тикали вверх), где  $\omega = \sqrt{k/m}$  – круговая частота колебаний.

В начальный момент пружина не деформирована; следовательно, в этот момент ускорение груза равно ускорению свободно падающего тела:  $a_x = -g$  и максимально по величине. Максимальная скорость достигается при прохождении грузом положения равновесия. Амплитуда  $V$  колебаний скорости связана с амплитудой  $A$  колебаний ускорения соотношением  $V = A/\omega$ . Отсюда

$$V = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

После прохождения положения равновесия ускорение груза направлено вверх, растет по величине и достигает при остановке максимального значения  $a_x = g$ . Из второго закона Ньютона  $ma_x = F_x + mg_x$  находим максимальную величину силы упругости пружины:

$$F = mg - (-mg) = 2mg.$$

**Задача 2.** В известном опыте академик А.Ф.Иоффе для определения амплитуды колебаний ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис.3). Найдите амплитуду  $X$  колебаний ножки камертона,

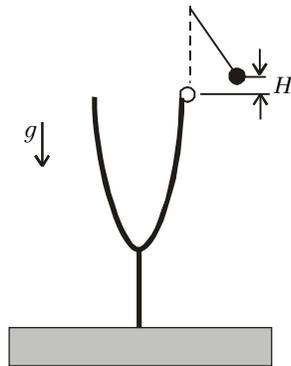


Рис. 3

на, если максимальная высота подъема шарика после одного отскока (точнее – ее среднее значение при многочисленных опытах) равна  $H$ . Частота колебаний ножки камертона  $\nu$ . Масса шарика мала по сравнению с массой ножки камертона.

Найдем величину скорости, которую приобретает легкий неподвижный шарик в результате абсолютно упругого соударения с массивной ножкой камертона, движущейся со скоростью  $\vec{V}$ . Покоящийся относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета шарик движется относительно такой ножки со скоростью  $-\vec{V}$ . В результате

абсолютно упругого соударения относительная скорость шарика меняет знак и становится равной  $\vec{V}$ . Тогда скорость шарика в неподвижной системе отсчета, равная векторной сумме скорости ножки и относительной скорости шарика, будет равна  $2\vec{V}$ . Максимальная высота подъема шарика достигается при максимальной начальной скорости, которая для ножки камертона равна  $X\omega$ , а для шарика – соответственно,  $2X\omega$ . По закону сохранения полной механической энергии,

$$\frac{m(2X\omega)^2}{2} = mgH,$$

где  $m$  – масса шарика. Отсюда, с учетом соотношения  $\omega = 2\pi\nu$ , находим искомую амплитуду колебаний:

$$X = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

**Задача 3.** На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик. Масса чашки  $m_1$ , масса грузика

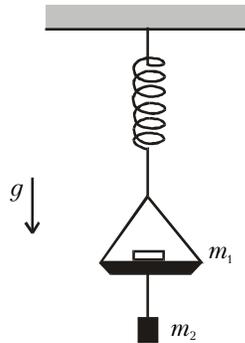


Рис. 4

пренебрежимо мала. К дну чашки подвешен груз массой  $m_2$  (рис.4). Вся система находится в равновесии. Нить, на которой подвешен груз, перегибают. При каком соотношении между  $m_1$  и  $m_2$  грузик на чашке начнет подпрыгивать?

После отрыва груза массой  $m_2$  положение равновесия системы сместится вверх на  $X = m_2g/k$ , где  $k$  – жесткость пружины. Колебания смещения  $x$  чашки относительно нового положения равновесия будут происходить по гармоническому закону  $x(t) = X \cos \omega t$  с круговой частотой  $\omega = \sqrt{k/m_1}$  (ось  $Ox$  направлена по вертикали вниз). В процессе подъема чашки с грузом после прохождения положения равновесия ускорение направлено вниз, растет по величине и достигает наибольшего значения

$$A = \omega^2 X = \frac{kX}{m_1} = \frac{m_2g}{m_1}.$$

Если  $A < g$ , т.е.  $m_2 < m_1$ , при движении чашки вниз грузик будет оставаться на ней. Если  $A > g$ , т.е.  $m_2 > m_1$ , грузик оторвется от чашки (до того, как чашка остановится).

**Задача 4.** Математический маятник длиной  $L$  совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую величину

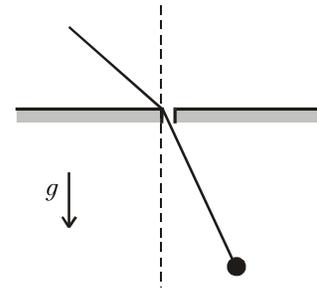


Рис. 5

$\Delta L$ , вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину  $\Delta L$ . Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите относительное увеличение амплитуды колебаний угла отклонения нити от вертикали за один период.

При прохождении маятником положения равновесия внешняя сила поднимает грузик на  $\Delta L$  и совершает при этом работу

$$\left( \frac{mV^2}{L} + mg \right) \Delta L,$$

где  $m$  – масса грузика,  $V$  – его максимальная скорость. В крайних положениях, при которых угол отклонения нити от вертикали равен  $\pm A$ , длина маятника увеличивается на  $\Delta L$ . В этом случае работа внешней силы равна  $-mg\Delta L \cos A$ . В течение каждого периода длина маятника дважды увеличивается и уменьшается. Таким образом, приращение энергии маятника за период колебаний составляет

$$\Delta W = 2 \left( \frac{mV^2}{L} + mg(1 - \cos A) \right) \Delta L,$$

или, поскольку рассматриваются малые колебания, т.е. угол  $A$  мал и  $\cos A = 1 - A^2/2$ ,

$$\Delta W = 2 \left( mg\Delta L \frac{A^2}{2} + \frac{mV^2}{L} \Delta L \right).$$

Амплитуда колебаний скорости  $V$  свя-

зана с амплитудой колебаний смещения  $LA$  соотношением  $V = \omega LA$ , где  $\omega = \sqrt{g/L}$  – круговая частота колебаний маятника. Тогда

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} \frac{mV^2}{2} = 6 \frac{\Delta L}{L} \frac{mgL}{2} \frac{A^2}{2}.$$

Энергия маятника равна

$$W = \frac{mV^2}{2} = mgL \frac{A^2}{2},$$

поэтому формула для  $\Delta W$  принимает вид

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} W.$$

Таким образом, энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии  $W$  и величине  $\Delta L/L$ . Отсюда для относительного увеличения энергии получаем

$$\frac{\Delta W}{W} = 6 \frac{\Delta L}{L}.$$

Теперь, принимая во внимание выражение для энергии маятника

$$W = mgL \frac{A^2}{2},$$

найдем

$$\Delta W = \frac{mgL}{2} 2A\Delta A \text{ и } \frac{\Delta W}{W} = 2 \frac{\Delta A}{A}.$$

Сравнивая между собой два выражения для  $\Delta W/W$ , для относительного увеличения амплитуды угла за период получим

$$\frac{\Delta A}{A} = 3 \frac{\Delta L}{L}.$$

**Задача 5.** Вдали от всех тяготеющих масс в космосе находится тонкая однородная спица длиной  $L = 10$  м и массой  $M = 1$  кг. По ней без трения может скользить бусинка массой  $m = 0,1$  кг. В начальный момент бусинка смещена относительно центра спицы на  $d = 1$  см и система неподвижна. С какой по величине скоростью  $V$  (в системе спицы) и через какое время  $\tau$  бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>.

В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало неподвижной системы отсчета  $OX$  поместим в центр масс, а подвижную систему отсчета  $OX_1$  свяжем со спицей. Ускорение бусинки при малом ее смещении  $x_1$  (в системе спицы) определяется силой притяжения

концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии  $L/2$  от бусинки:

$$a_{6x} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3} x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки равно

$$a_{cx} = -\frac{F_x}{M} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3} x_1.$$

Для сложения ускорений справедливо то же правило, что и для сложения скоростей (в этом легко убедиться, например, путем дифференцирования). Тогда ускорение бусинки относительно стержня будет

$$a_{6x_1} = x_1'' = a_{6x} - a_{cx} = -\frac{8G(M+m)}{L^3} x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний равна

$$\omega = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}} \approx 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Бусинка вернется в центр спицы через четверть периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ с}$$

с относительной скоростью

$$V = \omega d \approx 0,77 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}.$$

**Задача 6.** Потенциальная энергия атома в некотором кристалле описывается формулой  $U(r) = U_0 \left( (r_0/r)^{12} - 2(r/r_0)^6 \right)$ , где  $U_0 = 8,8 \cdot 10^{-4}$  эВ, а  $r_0 = 0,287$  нм соответствует равновесному положению атома. При малых отклонениях от положения равновесия происходят колебания. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой  $\omega = 2\pi\nu$  может принимать значения  $E_n = h\nu(n + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Оцените наименьшую амплитуду  $X_0$  колебаний смещения атома в таком кристалле. Масса атома  $m = 6,4 \cdot 10^{-24}$  г;  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Для определения круговой частоты  $\omega$  колебаний атома обратимся к гармоническим колебаниям груза массой  $m$  на пружине жесткостью  $k$ , находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. При смещении на  $x$  от положения равновесия приращение потенциальной энергии груза составляет  $kx^2/2$ , приращение его кинетической энергии со-

ставляет  $mv_x^2/2$ , а круговая частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Вернемся к нашей задаче и проанализируем выражение для потенциальной энергии атома в кристалле. Отметим, что при  $r = r_0$  потенциальная энергия достигает минимума (проверьте это самостоятельно). Тогда при малых смещениях  $\delta r$  ( $\delta r \ll r_0$ ) от положения равновесия приращение потенциальной энергии можно приближенно считать пропорциональным квадрату смещения:

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = k(\delta r)^2/2.$$

Найдем коэффициент пропорциональности  $k$ . При малых  $x$  справедливы приближенные равенства

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2,$$

$$1/(1+x) = 1 - x,$$

и приращение потенциальной энергии при малых смещениях  $\delta r$  от положения равновесия принимает вид

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = (36U_0/r_0^2)(\delta r)^2.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{6}{r_0} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Искомую амплитуду  $X_0$  найдем из условия квантования колебаний:

$$E_0 = h\nu/2 = kX_0^2/2,$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{m\nu}} = \sqrt{\frac{hr_0}{12\pi\sqrt{2mU_0}}} = 0,06 \text{ нм}.$$

### Упражнения

**1.** На неподвижный груз массой  $m = 10$  кг, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный пружиной жесткостью  $k = 4 \cdot 10^3$  Н/м к вертикальной стенке (рис.6), в течение некоторого времени  $\tau$  действует постоянная по величине и направлению сила  $F$ . При каких значениях  $\tau$  амплитуда колебаний скорости после прекращения действия силы будет максимальной?

**2.** Брусок массой  $m_1$  под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой  $X$  и периодом  $T$ . Пуля массой  $m_2$ , летящая вдоль направления движения бруска, попадает в него. В результате колебания прекращаются. Определите величину  $V$  скорости пули.

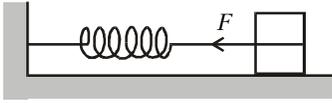


Рис. 6

Время торможения пули в бруске мало по сравнению с периодом колебаний.

3. Чашка пружинных весов с гирями (рис.7) совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $X$  и периодом  $T$ . Масса чашки и гирь  $m_1$ . Гирию какой массы  $m_2$  следует снять с чашки весов в момент нахождения ее в крайнем

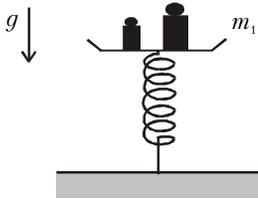


Рис. 7

верхнем положении, чтобы колебания прекратились?

4. Небольшой шарик на нити длиной  $L$  совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при

каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую по сравнению с  $L$  величину  $\Delta L = 3$  мм, вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (см. рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину  $\Delta L$ , отпуская ее. Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите период  $T$  колебаний, если за каждый период амплитуда колебаний скорости увеличивается на  $\delta = 0,5\%$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. На тележке массой  $m_1$ , покоящейся на горизонтальных рельсах, укреплен маятник – шарик массой  $m_2$  на нити длиной  $L$ . Найдите период  $T$  малых колебаний маятника, которые он будет совершать, если отклонить его вдоль рельсов на небольшой угол и затем отпустить одновременно с тележкой, не сообщив им начальной скорости.

6. На рисунке 8 изображена часть графика зависимости энергии взаимодействия  $U$  (эВ) атомов в молекуле азота от межатомного расстояния  $r$  (нм). Считая, что эта зависимость приближенно описывается формулой  $U(r) = U_0 + k(r - r_0)^2/2$ , найдите частоту  $\omega$  малых колебаний атомов в моле-

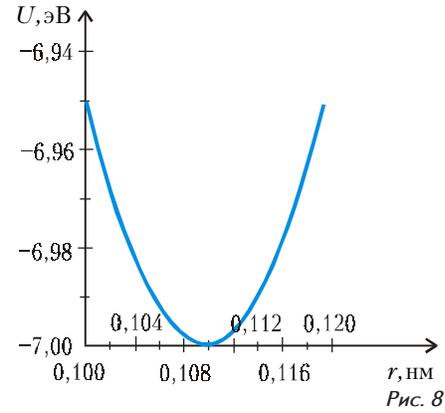


Рис. 8

куле азота. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой  $\omega = 2\pi\nu$  может принимать значения  $E_n = h\nu(n + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Невозбужденная молекула азота поглощает квант света частотой  $\omega$  и переходит из состояния с  $n = 0$  в возбужденное состояние с  $n = 1$ . Оцените амплитуду  $X_1$  колебаний смещения атомов в молекуле в этом состоянии. Масса атома азота  $m = 2,3 \cdot 10^{-23}$  г.