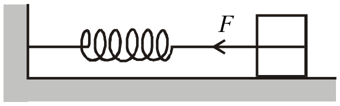

Рис. 6

колебаний.

3. Чашка пружинных весов с гирями (рис.7) совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой X и периодом T. Масса чашки и гирь m_1. Гирю какой массы m_2 следует снять с чашки весов в момент нахождения ее в крайнем верхнем положении, чтобы колебания прекратились?

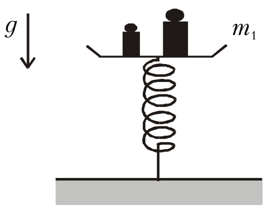

Рис. 7

4. Небольшой шарик на нити длиной L совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую по сравнению с L величину ΔL = 3 мм, вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (см. рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину ΔL, отпуская ее. Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите период T колебаний, если за каждый период амплитуда колебаний скорости увеличивается на δ = 0,5%. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

5. На тележке массой m_1, покоящейся на горизонтальных рельсах, укреплен маятник – шарик массой m_2 на нити длиной L. Найдите период T малых колебаний маятника, которые он будет совершать, если отклонить его вдоль рельсов на небольшой угол и затем отпустить одновременно с тележкой, не сообщив им начальной скорости.

6. На рисунке 8 изображена часть графика зависимости энергии взаимодействия U (эВ) атомов в молекуле азота от межатомного расстояния r (нм). Считая, что эта зависимость приближенно описывается формулой $U(r) = U_0 + k(r - r_0)^2/2$, найдите частоту ω малых колебаний атомов в молекуле азота. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой $\omega = 2\pi\nu$ может принимать значения $E_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0$, 1, 2, ..., где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. Невозбужденная молекула азота поглощает квант света частотой ω и переходит из состояния с $n = 0$ в возбужденное состояние с $n = 1$. Оцените амплитуду X_1 колебаний смещения атомов в молекуле в этом состоянии. Масса атома азота $m = 2{,}3 \cdot 10^{-23}$ г.

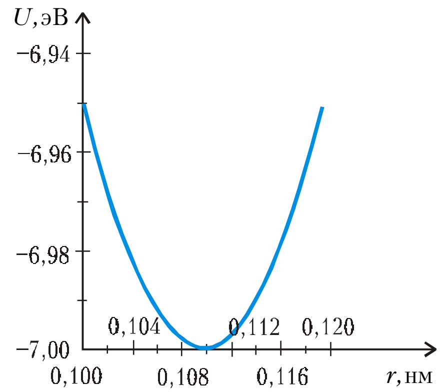

Рис. 8

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\sin 2x + \left(\sqrt{3} + 1\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x + 4} + \log_{1/2}(13 - x)}{\left|x^2 + 2x - 3\right| - \left|2x^2 - 10x + 8\right|} \geq 0.$$

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35°$, $\angle D = 145°$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Найдите все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x$$

и

$$y = -\frac{2}{3} - 2\operatorname{arctg} kx$$

имеет положительную ординату.

5. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H, причем SH – высота пирамиды. Найдите ребра CS и CD, если $CH = 4$, $AS = 3\frac{3}{4}$, $AD = 3$ и $AB = BS$.

6. Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \left(y^2 - x^2\right) + 6\left(y^2 - x^2\right) - (y + x)^2 + \\ \qquad + 5y + 7x + 1 > 0, \\ y > 1 - x. \end{cases}$$