зана с амплитудой колебаний смещения LA соотношением $V = \omega LA$, где $\omega = \sqrt{g/L}$ – круговая частота колебаний маятника. Тогда

$$\Delta W = 6\frac{\Delta L}{L}\frac{mV^2}{2} = 6\frac{\Delta L}{L}mgL\frac{A^2}{2}.$$

Энергия маятника равна

$$W = \frac{mV^2}{2} = mgL\frac{A^2}{2},$$

поэтому формула для ΔW принимает вид

$$\Delta W = 6\frac{\Delta L}{L}W.$$

Таким образом, энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии W и величине $\Delta L/L$. Отсюда для относительного увеличения энергии получаем

$$\frac{\Delta W}{W} = 6\frac{\Delta L}{L}.$$

Теперь, принимая во внимание выражение для энергии маятника

$$W = mgL\frac{A^2}{2},$$

найдем

$$\Delta W = \frac{mgL}{2}2A\Delta A \text{ и } \frac{\Delta W}{W} = 2\frac{\Delta A}{A}.$$

Сравнивая между собой два выражения для $\Delta W/W$, для относительного увеличения амплитуды угла за период получим

$$\frac{\Delta A}{A} = 3\frac{\Delta L}{L}.$$

Задача 5. *Вдали от всех тяготеющих масс в космосе находится тонкая однородная спица длиной $L = 10$ м и массой $M = 1$ кг. По ней без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. В начальный момент бусинка смещена относительно центра спицы на $d = 1$ см и система неподвижна. С какой по величине скоростью V (в системе спицы) и через какое время τ бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная $G = 6,67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.*

В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало неподвижной системы отсчета OX поместим в центр масс, а подвижную систему отсчета OX_1 свяжем со спицей. Ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 (в системе спицы) определяется силой притяжения концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии $L/2$ от бусинки:

$$a_{бx} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки равно

$$a_{сx} = -\frac{F_x}{M} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x_1.$$

Для сложения ускорений справедливо то же правило, что и для сложения скоростей (в этом легко убедиться, например, путем дифференцирования). Тогда ускорение бусинки относительно стержня будет

$$a_{бx_1} = x_1'' = a_{бx} - a_{сx} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний равна

$$\omega = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}} \approx 0,77\cdot10^{-6}\ \text{с}^{-1}.$$

Бусинка вернется в центр спицы через четверть периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \approx 2\cdot10^6\ \text{с}$$

с относительной скоростью

$$V = \omega d \approx 0,77\cdot10^{-8}\ \text{м/с}.$$

Задача 6. *Потенциальная энергия атома в некотором кристалле описывается формулой $U(r) = U_0\left((r_0/r)^{12} - 2(r/r_0)^6\right)$, где $U_0 = 8,8\cdot10^{-4}$ эВ, а $r_0 = 0,287$ нм соответствует равновесному положению атома. При малых отклонениях от положения равновесия происходят колебания. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой $\omega = 2\pi\nu$ может принимать значения $E_n = h\nu(n+1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = 6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Оцените наименьшую амплитуду X_0 колебаний смещения атома в таком кристалле. Масса атома $m = 6,4\cdot10^{-24}$ г; 1 эВ $= 1,6\cdot10^{-19}$ Дж.*

Для определения круговой частоты ω колебаний атома обратимся к гармоническим колебаниям груза массой m на пружине жесткостью k, находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. При смещении на x от положения равновесия приращение потенциальной энергии груза составляет $kx^2/2$, приращение его кинетической энергии составляет $mv_x^2/2$, а круговая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{k/m}$. Вернемся к нашей задаче и проанализируем выражение для потенциальной энергии атома в кристалле. Отметим, что при $r = r_0$ потенциальная энергия достигает минимума (проверьте это самостоятельно). Тогда при малых смещениях δr $(\delta r \ll r_0)$ от положения равновесия приращение потенциальной энергии можно приближенно считать пропорциональным квадрату смещения:

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = k(\delta r)^2/2.$$

Найдем коэффициент пропорциональности k. При малых x справедливы приближенные равенства

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2,$$

$$1/(1+x) = 1 - x,$$

и приращение потенциальной энергии при малых смещениях δr от положения равновесия принимает вид

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = \left(36U_0/r_0^2\right)(\delta r)^2.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{6}{r_0}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Искомую амплитуду X_0 найдем из условия квантования колебаний:

$$E_0 = h\nu/2 = kX_0^2/2,$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{m\nu}} = \sqrt{\frac{hr_0}{12\pi\sqrt{2mU_0}}} = 0,06\ \text{нм}.$$

Упражнения

1. На неподвижный груз массой $m = 10$ кг, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный пружиной жесткостью $k = 4\cdot10^3$ Н/м к вертикальной стенке (рис.6), в течение некоторого времени τ действует постоянная по величине и направлению сила F. При каких значениях τ амплитуда колебаний скорости после прекращения действия силы будет максимальной?

2. Брусок массой m_1 под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой X и периодом T. Пуля массой m_2, летящая вдоль направления движения бруска, попадает в него. В результате колебания прекращаются. Определите величину V скорости пули.