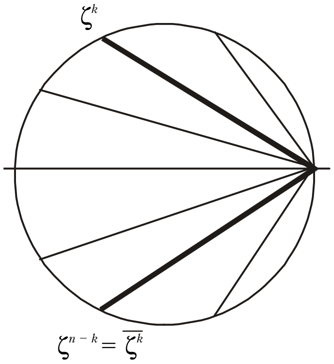

Рис.4

модуля произведения:

$$\sqrt{n} = \left|(1-\zeta)\left(1-\zeta^2\right)\ldots\left(1-\zeta\right)^{(n-1)/2}\right|. \qquad (6)$$

Раскрыв скобки в произведении, стоящем в формуле (6) под знаком модуля, мы получим вектор, длина которого равна $\sqrt{n}$. Он оказывается суммой корней из единицы. (Знаки вычитания нас не смущают, поскольку корень из единицы, взятый со знаком минус, все равно является корнем некоторой степени из единицы.) Если некоторые корни из единицы встретятся в этой сумме неоднократно, то можно применить прием пункта а) и по одному, вводя все новые простые числа, заменять такие корни.

Упражнение 5. Выпишите равенство, аналогичное равенству (6), для четного n.

Упражнение 6. а) Найдите произведение $A_1A_n \cdot A_2A_n \cdot\ldots\cdot A_{n-1}A_n$ длин сторон и диагоналей, выходящих из вершины A_n правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, вписанного в окружность единичного радиуса. б) Найдите произведение длин всех сторон и диагоналей правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

Упражнение 7. Пусть $ABCDE$ – правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром O. Если $AO = 1$ и если точка P симметрична точке O относительно точки A, докажите, что $PB \cdot PC = \sqrt{31}$.

Упражнение 8. а) Выведите из равенства (6), что если n нечетное, то

$$2^{(n-1)/2}\sin(\pi/n)\sin(2\pi/n)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\Big/n\right) = \sqrt{n}\,.$$

б) Найдите произведение

$$\sin(\pi/n)\sin(2\pi/n)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{n-2}{2}\pi\Big/n\right),$$

где n – четное число.

К сожалению, формула (6) дает только длину, а не направление вектора. Получить вектор длиной $\sqrt{n}$ известного направления проще всего при помощи формул для гауссовых сумм (см. следующий раздел). Можно обойтись и более простыми (но, к сожалению, менее естественными) средствами – применив к формуле упражнения 8 а) формулу $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ преобразования произведения синусов в разность косинусов и аналогичные формулы для произведения синуса и косинуса и для произведения косинусов, можно получить формулу вида

$$\sum_k 2\cos\frac{m_k}{2n}\pi = \sqrt{n}\,,$$

где m_k – целые числа. Далее можно воспользоваться тем, что удвоенный косинус любой рациональной доли угла π есть сумма сопряженных корней из единицы (а именно, $2\cos\frac{m_k}{2n}\pi = \eta^{m_k} + \eta^{-m_k}$, где $\eta = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)$ – корень $2n$-степени из единицы).

Упражнение 9. Представьте в виде суммы корней из единицы числа а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$.

Гауссовы суммы

Обозначим

$$S_n = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \ldots + \zeta^{(n-1)^2}.$$

Упражнение 10. Вычислите S_n при а) n = 1, 2,..., 6; б*) $n = 7$; в) n = 8, 9, 10.

После ряда безуспешных попыток Гаусс в 1811 году доказал, что

$$S_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ i\sqrt{n}, & n \equiv 3 \pmod 4, \\ (1+i)\sqrt{n}, & n \equiv 0 \pmod 4). \end{cases}$$

В 1835 году Дирихле при помощи рядов Фурье получил другое доказательство этого факта. К сожалению, оно тоже слишком сложное и не может здесь обсуждаться.

Абсолютную величину S_n, в отличие от точного значения этого числа, найти легко. Мы сделаем это в случае, когда n – нечетное число. Поскольку модуль числа равен корню из произведения числа и его сопряженного, достаточно доказать формулу

$$S_n\overline{S_n} = n, \qquad (7)$$

т. е.

$$\left(1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \ldots + \zeta^{(n-1)^2}\right)\times$$
$$\times\left(1 + \overline{\zeta} + \overline{\zeta^4} + \overline{\zeta^9} + \ldots + \overline{\zeta^{(n-1)^2}}\right) = n.$$

Как известно, $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$. Раскроем скобки. При умножении взятого из первой скобки числа ζ^{k^2} , где $k = 0,\ldots, n-1$, на взятое из второй скобки слагаемое ζ^{-m^2} , где $m = 0,\ldots, n-1$, получаем $\zeta^{k^2-m^2}$. Обозначим через a и b остатки от деления на n чисел $k - m$ и $k + m$. Очевидно, $\zeta^{k^2-m^2} = \zeta^{ab}$. Любой паре остатков ($a$; b) соответствует единственная пара (k; m). (Докажите!) Поэтому при суммировании встретятся по одному разу все n^2 разных пар (a; b) и, следовательно,

$$S_n\overline{S_n} = \sum_{b=0}^{n-1}\sum_{a=0}^{n-1}\zeta^{ab}\,.$$

При $b = 0$ все n слагаемых вида ζ^{ab} равны 1. При $1 \le b < n$ сумма $\sum_{a=0}^{n-1}\zeta^{ab}$ равна 0. Равенство (7) доказано.

Упражнение 11. Докажите, что а) если $n = 4k + 2$, где $k \in \boldsymbol{N}$, то $S_n = 0$; б) если $n = 4k$, где $k \in \boldsymbol{N}$, то $|S_n| = \sqrt{2n}$.

Упражнение 12*. Докажите, что если p – нечетное простое число, то $S_p^2 = (-1)^{(p-1)/2}p$.