рого находится вдали на линии центров сферических поверхностей?

А.Очков

Решения задач М1641, М1646 — М1650, Ф1658 — Ф1667

М1641. *Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, …, и n камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно.*

Докажем, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно. Доказательство будет индуктивным. Индукция проводится по числу камней.

Случай $n = 1$ очевиден – на первой клетке камень лежит по условию.

Пусть можно положить камень на клетку 2^{n-1}, используя n камней. Покажем: как добраться до клетки 2^n, используя на один камень больше. Все требуемые для этого действия разбиваются на четыре этапа.

Этап 1. Без использования дополнительного камня поместим камень на клетку 2^{n-1}.

Этап 2. Дополнительный камень поместим на клетку $2^{n-1} + 1$.

Этап 3. Теперь уберем с полоски все камни, кроме самого первого (лежащего на первой клетке) и самого последнего (лежащего на клетке $2^{n-1} + 1$). Это можно сделать, повторяя в обратном порядке действия, совершенные на этапе 1 (разрешенные действия симметричны относительно постановки и снятия камней).

Этап 4. Теперь забудем о первых 2^{n-1} клетках полоски. Повторим все действия этапа 1, считая начальным камень, лежащий на клетке $2^{n-1} + 1$. При этом мы ставим и снимаем камни, освободившиеся на этапе 3.

Последним действием этапа 4 на клетку $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ кладется камень, что и требовалось показать.

Дальше клетки с номером 2^{n-1} камень положить нельзя. Доказательство также использует индукцию по числу камней. И в этом случае база индукции очевидна (при $n = 1$ единственный камень остается на первой клетке по условию).

Теперь предположим, что для всех $k < n$ доказываемое утверждение верно, т.е. для того, чтобы положить камень на клетку с номером большим 2^{k-1}, нам нужно использовать более k камней.

Пусть N – максимальный номер клетки, на которую можно положить камень при использовании n камней. Обозначим количество требуемых для этого действий T, состояние полоски (положения камней, лежащих на ней) после t действий обозначим $A(t)$, наибольший номер клетки, в которой лежит камень после t действий, обозначим $N(t)$ (в этих обозначениях $N = N(T)$). Из правил, по которым кладутся и снимаются камни, следует, что $N(t) - 1 \le N(t+1) \le N(t) + 1$. Поэтому среди чисел $N(t)$ обязательно встретятся все числа от 1 до N, быть может, не один раз.

Разобьем полоску на две части: клетки от 1 до $2^{n-2} + 1$ образуют левую часть, а клетки с номерами, большими $2^{n-2} + 1$, образуют правую часть.

Если $N \le 2^{n-2} + 1$ (все камни в левой части), то предположение индукции доказано и для n камней.

В противном случае найдется такое t_0, что выполнено $N(t_0) = 2^{n-2} + 1$ и $N(t) > 2^{n-2} + 1$ при $t > t_0$. Другими словами, начиная с момента t_0, в правой части находится хотя бы один камень.

Лемма. При $t > t_0$ в левой части находятся по крайней мере два камня.

Доказательство. Камень, стоящий на первой клетке, находится в левой части всегда. Предположим, что в некоторый момент t' в левой части не осталось никаких камней за исключением первого. Для $t_0 \le t \le t'$ обозначим через $B(t'-t)$ такое состояние полоски, которое отличается от состояния $A(t)$ тем, что сняты все камни из правой части (а в левой части $A(t)$ совпадает с $B(t'-t)$). В состоянии $B(0)$ есть ровно один камень на первой клетке. Переход от состояния $B(\tau)$ к состоянию $B(\tau+1)$ совершается разрешенным действием (правила обратимы – если можно поставить камень, то его можно следующим действием снять, и наоборот). В состоянии $B(t'-t_0)$ на клетке $2^{n-2} + 1$ лежит камень. В любом состоянии $B(t)$, $0 \le t \le t' - t_0$, на полоске лежит не более $n - 1$ камня. Действительно, момент t_0 был выбран так, что в любой момент после него в правой части полоски есть хотя бы один камень. При переходе от $A(t'-t)$ к $B(t)$ теряются все камни, оказавшиеся в правой части. Так что в состоянии $B(t)$ по крайней мере на один камень меньше, чем в состоянии $A(t'-t)$. Таким образом, состояния $B(t)$ описывают способ положить камень на $2^{n-2} + 1$ клетку, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня. Это противоречит предположению индукции.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь забудем о всей левой части полоски, кроме клетки $2^{n-2} + 1$. Как следует из доказанной леммы, от момента t_0 до T в правой части полоски используется не более $n - 2$ камней. Обозначим через $C(t)$, $t_0 \le t \le T$, такое состояние полоски, которое получается из $A(t)$ сдвигом влево на 2^{n-2} и добавлением камня на первую клетку, если его там нет. Состояния от $C(t_0)$ до $C(T)$ описывают способ положить камень на клетку с номером $N - 2^{n-2}$, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня.

В силу предположения индукции $N - 2^{n-2} \le 2^{n-2}$, поэтому $N \le 2^{n-1}$. Применение принципа математической индукции завершает доказательство.

М.Вялый

М1646. *У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы собрались у одного крестьянина.*

На простых примерах проверяется, что ситуация 7 раскулачиваний в принципе возможна.